

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
高等院校电气信息类专业"互联网+"创新规划教材

物理光学理论与应用

（第3版）

编著｜宋贵才　全　薇







说　明

本书电子版仅提供给高校任课教师使用，如有任课教师需要本书课件或其他相关教学资料，请联系北京大学出版社客服，微信手机同号：15600139606，扫下面二维码可直接联系。

由于教材版权所限，仅限任课教师索取，谢谢！



"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

高等院校电气信息类专业"互联网+"创新规划教材

物理光学理论与应用
（第 3 版）

宋贵才　全　薇　编著



内 容 简 介

本书从光的电磁理论出发，系统、深入地讨论了光在介质中传播时发生的基本现象和遵循的基本规律。全书内容共分6章：光在各向同性介质中的传播规律与应用；光在各向异性介质中的传播规律与应用；光与物质相互作用的理论与应用；光的干涉理论与应用；光的衍射理论与应用；光的偏振理论与应用。

本着厚基础、重应用，使读者学以致用的理念，本书全面、系统地讲述了光学现象的物理实质和光学原理在工业、农业、国防和科学研究等方面的应用。

本书可作为光电信息科学与工程专业、应用物理专业、电子科学与技术专业、测控技术与仪器专业以及光学工程专业本科生的专业基础教材，也可供从事与光学学科相关专业学习和研究的师生以及科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

物理光学理论与应用/宋贵才，全薇编著. —3版. —北京：北京大学出版社，2019.4
高等院校电气信息类专业"互联网+"创新规划教材
ISBN 978-7-301-29712-4

Ⅰ.①物… Ⅱ.①宋…②全… Ⅲ.①物理光学—高等学校—教材 Ⅳ.①O436

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第165312号

书　　名 物理光学理论与应用（第3版）
WULI GUANGXUE LILUN YU YINGYONG(DI-SAN BAN)
著作责任者 宋贵才　全　薇　编著
策划编辑 程志强
责任编辑 李娉婷
数字编辑 刘　蓉
标准书号 ISBN 978-7-301-29712-4
出版发行 北京大学出版社
地　　址 北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址 http://www.pup.cn　新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱 pup_6@163.com
电　　话 邮购部 010-62752015　发行部 010-62750672　编辑部 010-62750667
印 刷 者
经 销 者 新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　20.75印张　473千字
2010年3月第1版　2015年9月第2版
2019年4月第3版　2019年4月第1次印刷
定　　价 56.00元

第 3 版前言

本书于 2014 年入选“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材，本书第 2 版于 2015 年 9 月出版，第 2 版深受广大读者的喜爱和好评，并于 2017 年获得第六届兵工高校优秀教材一等奖。

本书第 2 版出版以来，我们根据读者的意见以及课程教学的需要，在吸收学科专业发展成果的同时，不断对有关内容进行修改和完善。在本书准备新版之际，我们参考专家及读者意见，全面审视了第 2 版的内容，对部分章节进行了增减，特别是拓展了一些课外阅读内容。读者通过扫描书中的二维码，就可以阅读有关的知识，从而加强对课本知识的理解和掌握。本次修订增加拓展阅读内容 80 处。

另外，本次修订对全书的文字、公式、图表等进行了全面审阅，改正了容易使人产生误解的阐述和讲解不当之处。

因水平所限，本次修订难免会有不足之处，恳请读者包涵，并能一如既往地提出宝贵意见，使本书通过不断修订，趋于完善。

编　者

2019 年 1 月



【资源索引】

第 2 版前言

《物理光学理论与应用》一书深受广大读者的喜爱和好评。2011 年获得“长春理工大学优秀教材”称号，并获得第三届兵工高校优秀教材二等奖，2014 年入选“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。

《物理光学理论与应用》自 2010 年 3 月出版以来，编者不断对其进行修改和完善，在准备新版之际，编者参考专家及读者意见，全面审视了原版内容，对部分章节进行了修订。

本次修订改动较多的章节有 1.6 节“复色光波”、1.9 节“菲涅耳公式”、2.2 节“光在晶体中传播的基本规律”、2.6 节“波矢折射率曲面方程与光线折射率曲面方程”、2.7 节“波矢曲面方程与光线曲面方程”、2.9 节“光在晶体表面的反射与折射”、3.1 节“光与物质相互作用的经典理论”、4.3 节“等倾干涉”、4.9 节“单层光学薄膜”、5.1 节“惠更斯-菲涅耳原理”、5.2 节“基尔霍夫衍射理论”、5.4 节“用傅里叶变换和有关函数处理衍射”和 6.4 节“偏振光与偏振光学元件的矩阵表示”。

另外，本次修订对全书的图表以及例题和习题进行了完善。

感谢一些读者告知书中易使人产生误解的阐述和讲解不当之处。

因水平所限，本次修订工作难免会有不足之处，恳请读者包涵，并能一如既往地提出宝贵意见，使本书通过不断打磨，臻于完善。

编　者

2015 年 2 月

第 1 版前言

本书着重讲解光在介质中传播时遵循的基本规律及光与介质相互作用的基本理论；干涉、衍射、偏振等光学现象的物理实质；光学理论和光学仪器在微距、小角度、物质成分和含量、表面检测等方面的应用。

本书的教学时数为 80 学时。全书共分 6 章：第 1 章，从光的电磁理论出发，着重讨论光在各向同性介质中的传播规律，以及光在介质表面的反射和折射规律；第 2 章，在介绍晶体基本特性的基础上，重点讨论光在单轴晶体和双轴晶体中传播时的基本规律以及光在晶体表面上的反射和折射规律；第 3 章，在介绍光与物质相互作用的经典理论基础上，讨论介质对光的吸收、色散和散射现象的本质和所遵循的基本规律，并介绍它们在物质成分、含量和浓度分析与检测等方面的应用；第 4 章，在分析产生干涉的条件基础上，主要讨论双光束干涉、多光束干涉、干涉仪器及干涉在光学薄膜设计中的应用；第 5 章，在介绍惠更斯-菲涅耳衍射理论的基础上，详细讨论基尔霍夫标量衍射理论，并用傅里叶变换的方法来处理夫琅禾费衍射，介绍衍射理论在光谱分析等方面的应用；第 6 章，在介绍自然光和偏振光特点的基础上，着重研究偏振光的产生、偏振光和偏振器件的琼斯矩阵表示、偏振光的干涉及偏振光的应用。

本书前后连贯，逻辑性强，便于学习和记忆。本书图表丰富，推演过程详细，便于理解和掌握。本书各节都有要点总结，便于对重点知识的把握。本书各章后面有小结和应用实例，并附有与讲述内容联系紧密并且实用性强的习题，便于学以致用。

本书由宋贵才编写第 2、5、6 章，全薇编写第 3、4 章，王新编写第 1 章。宋贵才统编全稿，解辉、钟亮对全书进行了校订，并由梁柱主审。本书在编写过程中得到了张喜和、金光勇、马文联的大力支持，也得到了赵振明、李昌立、吕彦飞和雷建国的帮助，在此向他们表示诚挚的感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，殷切期望广大读者批评指正。

编　者

2010 年 1 月

目　　录





绪　　论



【人物简介】

人们都知道，没有光，人和动植物将不能生存。那么，光是什么？这个问题一直是科学家们研究和探讨的，至今为止，人们对光的本质的认识仍然在继续。

经过漫长的发展过程，在17世纪下半叶，对光的认识有了两种针锋相对的观点：一种是以牛顿(Newton，1643—1727)为代表的微粒说，另一种是以惠更斯(Christiaan Huygens，1629—1695)为代表的波动说。微粒说认为，光是由光源飞出来的微粒流，光在介质中传播时，光速的变化是介质对微粒产生引力的结果，并预言光在密度大的介质中的传播速度大于光在密度小的介质中的传播速度。波动说则认为，光是类似于水波、声波在“以太”中传播的弹性波，并认为光在密度大的介质中的传播速度小于光在密度小的介质中的传播速度。无论是微粒说，还是波动说，都对光的反射、折射等现象进行了解释，但在折射定律的解释上却存在明显的分歧。微粒说认为，光偏折是由于碰撞引起的，而波动说则认为是由于散射引起的。由于当时牛顿威望很高，多数人都接受了牛顿的观点，因而18世纪微粒说占主导地位。

到了19世纪，托马斯·杨(Thomas Young，1773—1829)和菲涅耳(Augustin-Jean Fresnel，1788—1827)对波动说的发展起到了决定性作用。1801年，托马斯·杨做了双缝干涉实验，并第一次成功地测定了光的波长。1815年，菲涅耳用杨氏干涉原理补充了惠更斯原理，形成了惠更斯-菲涅耳原理。运用这个原理不仅可以解释光在均匀介质中的直线传播，而且能解释光通过障碍时所发生的衍射现象，因此，它是波动光学的一个重要原理。1808年，马吕斯(Etienne Louis Malus，1775—1812)发现了光在两种介质的界面上反射时的偏振现象，随后菲涅耳和阿喇果(Arago，1768—1853)对光的偏振现象和偏振光的产生进行了研究。为了解释这些现象，托马斯·杨在1817年提出了光波是横波的假设。横波的假设很好地解释了光的偏振现象。但这时仍然把光波看作是在“以太”中传播的弹性波，至于“以太”是什么，仍难自圆其说，这样，波动理论存在的问题也就显露出来。

1845年，法拉第(Michael Faraday，1791—1867)发现了光的振动面在强磁场中的旋转，揭示了光学现象和电磁现象的内在联系。1856年，韦伯(Weber，1804—1891)和柯尔劳斯(Kohlrausch，1809—1858)在做电学实验时，发现电荷的电磁单位和静电单位的比值等于光在真空中的传播速度。从这些现象中人们得到启示，即在研究光学现象时，必须和其他物理现象联系起来考虑。

对光波动的完整理论描述是在19世纪中叶，1865年，麦克斯韦(James Clerk Maxwell，1831—1879)在总结前人研究工作的基础上，建立了电磁理论，预言了电磁波的存在，指出光也是一种电磁波。通过解波动方程，得到$n=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}$的麦克斯韦关系式。这表明，介质的光学常数与电学常数和磁学常数有着内在的联系。1888年，光的电磁理论被赫兹(Hertz，1857—1894)的实验证实，并测定了电磁波的速度恰好等于光的速度。从此，光的电磁理

论被人们普遍承认，麦克斯韦的电磁理论不仅是无线电技术的启明星，而且在人们认识光的本性方面向前迈进了一大步。但是，麦克斯韦的电磁理论无法解释当时实验证实的介质的折射率随着波长变化的色散现象。直到 1896 年，洛伦兹(Hendrik Antoon Lorentz，1853—1928)创立了电子论，这一问题才得到解决。洛伦兹认为，在电场力的作用下，电子做受迫振动而产生光的辐射。当光通过介质时，介质中电子的固有频率和外场的频率相同时，则束缚电子便成为较显著的光的吸收体。这样，利用洛伦兹的电子论不仅可以解释物质发射和吸收光的现象，而且可以解释光在介质中传播时光的色散现象。

在此期间，人们还用多种方法对光的传播速度进行了测量。1849 年，斐索(Fizeau，1819—1896)运用旋转齿轮法进行光速测量。1862 年，傅科(Foucault，1819—1868)利用旋转镜法测量了光在不同介质中的传播速度，并得到了与波动说相同的结论。1887 年，迈克尔逊(Albert Abrahan Michelson，1852—1931)进行光速测量时发现，顺着地球自转方向和逆着地球自转方向测量出来的光速相同，这就否定了当时人们公认的静止“以太”的存在，进一步确立了光的电磁理论学说。

19 世纪末到 20 世纪初，光学的研究深入至光的产生、光与物质相互作用的微观结构中。光的电磁理论的主要困难是不能解释光和物质相互作用的某些现象，例如，黑体辐射中能量按波长分布的问题、光电效应问题等。1900 年，普朗克(Max Karl Ernst Ludwig Planck，1858—1947)提出了辐射的量子理论，认为各种频率的电磁波只能以一定的能量子方式从振子发射，能量子是不连续的，其大小只能是电磁波的频率 ν 与普朗克常数(Planck’s constant) h 的乘积的整数倍，即 $E = nh\nu$ ($h = 6.6255916\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$)，从而成功地解释了黑体辐射问题。1905 年，爱因斯坦(Albert Einstein，1879—1955)发展了普朗克的能量子理论，将量子论贯穿整个辐射和吸收过程中，提出了光量子(光子)理论，圆满解释了光电效应问题，并被后来的康普顿(Arthur Holly Compton，1892—1962)效应所证实。但是，这里所说的光子不同于牛顿微粒说中的粒子，光子是和光的频率联系着的，光同时具有微粒和波动两种特性，即波粒二象性(wave particle duality)。

至此，人们从光的干涉、衍射和偏振等现象证实了光的波动性；从黑体辐射、光电效应和康普顿效应等又证实了光的粒子性。对于如何将有关光的本性的两个完全不同的概念统一起来，人们进行了大量的探索工作。

1924 年，德布罗意(Louis Victor de Broglie，1892—1987)创立了物质波学说，提出每一种物质的粒子都和一定的波相联系的假设，并把粒子和波通过关系式：$E = h\nu = \hbar\omega$ 和 $\boldsymbol{P} = \hbar\boldsymbol{k}$ 联系起来，其中，$\hbar = h/2\pi$。这一假设在 1927 年被戴维森(Davisson，1881—1958)和革末(Germer，1896—1971)的电子束衍射实验所证实。后来的一些实验进一步证实原子、分子、原子核、基本粒子等也都具有波粒二象性。

1926 年，薛定谔(Erwin Schrodinger，1887—1961)建立了物质波所满足的方程，提出了波函数的概念，认为光子的个体是微粒量子，其运动符合波函数，作为光子统计的集合表现出波动性。这一观点使人们对光的本质有了进一步的认识。

1959 年，马科斯·波思(Max Born，1882—1970)与沃尔夫合著了《光学原理》，到 2001 年已出至第七版，成为光的电磁理论方面的一部公认经典著作。

20 世纪 60 年代激光问世以后，光学又开始了一个新的发展时期，出现了许多新兴光学学科，例如，傅里叶光学、薄膜光学、集成光学、非线性光学、纤维光学和全息光学等。应当指出的是，人们对光的本性的认识还远远没有完结，随着科学技术的不断发展，人们对光的本性的认识会更加深入、更加完善。

第 1 章

光在各向同性介质中的传播规律与应用



教学目的与要求

- 掌握交变电磁场中积分形式和微分形式的麦克斯韦方程组
- 掌握电磁场的波动方程和亥姆霍兹方程
- 掌握平面波及其基本性质
- 了解球面波和柱面波的基本特点
- 掌握光波的叠加方法
- 了解电磁场的边值关系
- 了解光在介质表面的反射和折射规律
- 掌握菲涅耳公式和斯托克斯倒逆关系
- 了解全反射及其应用
- 了解光在金属表面的反射和透射特点



本章引言

光波在诸如空气、水和玻璃等介质中传播时，其传播规律与光的传播方向无关，这类介质称为各向同性介质。



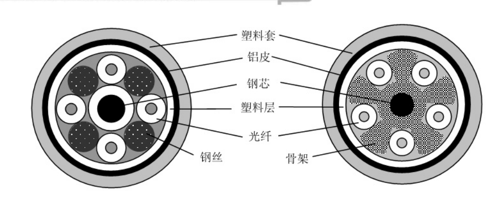
【光纤】

当光波在各向同性介质中传播时，需要分析和讨论光波随着时空变化的情况，从而掌握光波随时间和空间变化的基本规律；当光波遇到两种介质的交界面时，需要分析和讨论光波在两种介质的交界面处所满足的边值关系，从而掌握入射波、反射波和透射波之间的振幅、能量、位相和偏振等关系。

在实际中，可以利用光在各向同性介质中的传播规律，解决光波振幅、强度、位相、频率、波长以及速度等随着时间和空间的变化问题；还可以解决介质的折射率、反射率和透射率等问题。光在光纤中传输就是利用了全反射的原理，从而实现了光通信，图 1.0 为适用于光通信的光缆示意图。



【光通信】



(a) 层绞式　　(b) 骨架式

图 1.0　光缆示意图

本章围绕光在各向同性介质中和交界面处所遵循的基本规律而展开讨论。首先，利用微分形式的麦克斯韦方程组推导出光波电磁场的波动方程和亥姆霍兹方程，通过在直角坐标系、球坐标系和柱坐标系下解波动方程，得到平面波、球面波和柱面波随时间和空间变化的规律。其次，利用积分形式的麦克斯韦方程组推导出光波电磁场的边值关系，通过电磁场的边值关系得到光波在两种介质的交界处满足的反射、折射定律和菲涅耳公式。再次，通过对全反射以及光在金属表面的反射和透射的分析，加深对光波在各向同性介质中传播规律的理解和掌握。

1.1　麦克斯韦方程组

在电磁学和电动力学中，电磁场的普遍规律最终被总结为麦克斯韦方程组。通常情况下，光在介质中传播时麦克斯韦方程组可以写成积分和微分两种形式。从麦克斯韦方程组出发，结合具体的边界条件，可以定性、定量地分析和研究在给定条件下发生的光学现象，如光的反射、折射、干涉、衍射等。本节将讨论积分和微分形式的麦克斯韦方程组，并介绍电磁场中的常用公式。

1.1.1　积分形式的麦克斯韦方程组

在稳恒电磁场中，电磁现象的基本规律可以概括为以下 4 个基本方程，称它们为积分形式的麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \oiint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\sum q_i = Q \\ \oiint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=0 \\ \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \\ \oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I_i = I \end{cases} \tag{1.1-1}$$

式中，$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 分别表示电感应强度(电位移矢量)、磁感应强度、电场强度和磁场强度；对 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的积分分别表示电磁场中任意闭合曲面和闭合环路上的积分；$\sum q_i$ 表示闭



合曲面内包含的电荷的总和，即总电量 Q；$\sum I_i$ 表示闭合环路包围的传导电流的总和 I。

式(1.1-1)中，第一式称为电场的高斯(Gauss)定理，它表示任意的静电场中通过任意封闭曲面的电感强度通量等于该曲面内包含的总电量；第二式称为磁场的高斯定理，它表示通过任意封闭曲面的磁感应强度通量为零；第三式称为静电场的环路定理，它表示静电场中电场强度沿任意闭合环路的线积分恒等于零；第四式称为磁场安培(Ampere)环路定理，它表示磁场强度沿任意闭合环路的线积分等于该闭合环路所包围的传导电流的总和。

上述方程仅适合于稳恒电磁场情况，对于交变电磁场，麦克斯韦利用法拉第电磁感应定律和位移电流的概念，对式(1.1-1)中的第三式和第四式进行了修改。

1. 对第三式的修改

根据法拉第电磁感应定律，当一个闭合线圈处在变化的磁场中时，就会在闭合线圈中产生感应电动势，感应电动势的大小与磁感应强度通量 ϕ_B 随时间的变化率成比例，其方向由左手定则决定，可以表示为

$$U=-\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\iint\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.1-2}$$

麦克斯韦认为，感应电动势的产生是电场对线圈中自由电荷作用的结果。这种电场由变化的磁场产生，与静电场不同，它是涡旋电场。这种电场的存在不依赖于线圈，即使没有线圈，只要在空间某一区域磁场发生变化，就会有涡旋电场产生。所以，法拉第电磁感应定律实质上表示变化磁场和电场联系的普遍规律。

由于感应电动势等于涡旋电场沿闭合线圈移动单位正电荷一周时所做的功，即

$$U=\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.1-3}$$

因而，将式(1.1-3)代入式(1.1-2)，可以得到修改后的第三式为

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.1-4}$$

2. 对第四式的修改

麦克斯韦进一步认为，不仅变化的磁场能够产生电场，而且变化的电场也能够产生磁场，在激发磁场这一点上，电场的变化相当于电流，这种电流被称为“位移电流”。电场中通过任一截面的位移电流强度等于通过该截面的电感应强度通量 ϕ_D 的时间变化率，即

$$I_D=\frac{\mathrm{d}\phi_D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.1-5}$$

由于 $I_D=\iint \boldsymbol{j}_D\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，式中，$\boldsymbol{j}_D$ 为位移电流密度，所以由式(1.1-5)得到位移电流密度为

$$\boldsymbol{j}_D=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.1-6}$$

因此，在交变电磁场的情况下，磁场既包括传导电流产生的磁场，也包括位移电流产生的磁场。这样，可以得到修改后的第四式为

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I_i+\iint\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.1-7}$$

归纳起来，交变电磁场情况下积分形式的麦克斯韦方程组可以写成

$$\begin{cases} \oiint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum q_i = Q \\ \oiint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \\ \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\ \oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I_i + \iint \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \end{cases} \tag{1.1-8}$$

1.1.2 微分形式的麦克斯韦方程组

积分形式的麦克斯韦方程组一般用于在两种介质的分界面处求解从一种介质到另一种介质时电磁场各个矢量之间的关系。对于求解同种介质中给定点的电磁场随着时空变化的问题，通常使用微分形式的麦克斯韦方程组。可以利用数学中的高斯定理和斯托克斯(Stokes)定理将积分形式的麦克斯韦方程组变成微分形式的麦克斯韦方程组。

数学中的高斯定理为

$$\iint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint \nabla\cdot \boldsymbol{A}\mathrm{dv} \tag{1.1-9}$$

式中，$\nabla = (\partial/\partial x)\boldsymbol{x}_0 + (\partial/\partial y)\boldsymbol{y}_0 + (\partial/\partial z)\boldsymbol{z}_0$，称为哈密顿算符(Hamilton operator)，是一个矢量。$\nabla\cdot \boldsymbol{A} = \partial A_x/\partial x + \partial A_y/\partial y + \partial A_z/\partial z$，表示 $\boldsymbol{A}$ 的散度，也记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$。

对于式(1.1-8)中的第一式，如果闭合曲面积分域内包含的电荷密度(charge density)为 ρ，则

$$\oiint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum q_i = Q = \iiint \rho \mathrm{dv} \tag{1.1-10}$$

对照式(1.1-9)，可以得到

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1.1-11}$$

式(1.1-8)中的第二式和第一式类似，因此又可以得到

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.1-12}$$

数学中的斯托克斯定理为

$$\int \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint (\nabla\times \boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.1-13}$$

式中，$\nabla\times \boldsymbol{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{x}_0 + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{y}_0 + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{z}_0$，表示 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，也记为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$。

对于式(1.1-8)中的第四式，如果闭合环路包围的传导电流密度为 $\boldsymbol{j}$，则

$$\sum I_i = \iint \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.1-14}$$

因此式(1.1-8)中的第四式可以写成

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \iint \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.1-15}$$

对照式(1.1-13)，可以得到



$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.1-16}$$

式(1.1-8)中的第三式和第四式类似，因此又可以得到

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1-17}$$

因此，微分形式的麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.1-18}$$

1.1.3　电磁场常用公式

在均匀介质中，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 存在如下简单的关系：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1.1-19}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1.1-20}$$

式中，ε和μ是两个标量，分别称为介电常数和磁导率(permeability)。

在导电物质中还有欧姆(Ohm)定律：

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.1-21}$$

式中，σ 为电导率，单位为$(\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$。式(1.1-19)、式(1.1-20)和式(1.1-21)称为物质方程。

当物质在电磁场作用下产生电极化和磁极化时，有

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{1.1-22}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M} \tag{1.1-23}$$

式中，$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{M}$分别称为电极化强度和磁极化强度；$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2)$ (法拉/米)，称为真空中的介电常数；$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}^2/\mathrm{C}^3$ (亨利/米)，称为真空中的磁导率。电极化强度与电场强度之间的关系为

$$\boldsymbol{P} = \chi_{\mathrm{e}} \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{1.1-24}$$

式中，χ_{e}为介质的电极化率。引入相对介电常数ε_{r}，则有

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{r}} \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{\mathrm{r}} = 1 + \chi_{\mathrm{e}} \tag{1.1-25}$$

磁极化强度与磁场强度之间的关系为

$$\boldsymbol{M} = \chi_{\mathrm{m}} \boldsymbol{H} \tag{1.1-26}$$

式中，χ_{m}为介质的磁极化率。引入相对介电常数μ_{r}，则有

$$\mu = \mu_{\mathrm{r}} \mu_0, \quad \mu_{\mathrm{r}} = 1 + \chi_{\mathrm{m}} \tag{1.1-27}$$

对于非磁性介质，$\mu \approx \mu_0$，即$\mu_{\mathrm{r}} = 1$。

在研究辐射场强度和光能流以及场与粒子相互作用时，还将用到以下公式：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{1.1-28}$$

$$w_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.1-29}$$

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.1-30}$$

式中，$\boldsymbol{S}$ 称为辐射场强度矢量，又称坡印亭矢量(Poynting vector)，表示单位时间垂直通过单位面积的能量；w_{em} 称为电磁场能量密度，表示单位体积内电磁场的能量；$\boldsymbol{F}$ 称为洛伦兹力；$q\boldsymbol{E}$ 表示电场力；$q\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B}$ 表示磁场力。

本节讨论了积分和微分形式的麦克斯韦方程组，并回顾了电磁场中的常用重要公式。本节要点见表 1-1。

表 1-1　麦克斯韦方程组及常用公式

电磁类型	积分形式	微分形式	物质方程和常用公式
稳恒电磁场	$\oiint \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum q_i = Q$ $\oiint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$ $\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$ $\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I_i = I$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$ $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$ $\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{P} = \chi_{\mathrm{e}}\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0$ $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1 + \chi_{\mathrm{e}}$ $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$
交变电磁场	$\oiint \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum q_i = Q$ $\oiint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$ $\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ $\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I_i + \iint \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$ $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ $\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	

1.2　电磁场的波动方程



【电磁场】



【电磁波】

从微分形式的麦克斯韦方程组式(1.1-18)的第三式和第四式可以得出两个基本结论：一是任何随时间变化的磁场都会在其周围空间产生电场，这种电场具有涡旋性质，电场的方向可以由左手定则决定；二是任何随时间变化的电场会在周围空间产生磁场，这种磁场也具有涡旋性质，磁场的方向可以由右手定则决定。因此，电场与磁场是紧密相关的，其中一个发生变化时，另一个随即就会发生变化。换句话说，如果在空间某区域内的电场发生变化，那么在邻近区域内就会引起随时间变化的磁场，而这种变化的磁场又会在较远区域引起新的随时间变化的电场，接着这个新的变化的电场又会在更远处引起新的随时间变化的磁场，这样，交替变化的电场和磁场相互激发就形成了统一的场——电磁场。这个电磁场以一定的速度由近及远传播，从而形成电磁波。本节将讨论电磁场所满足的波动方程以及电磁波。



1.2.1　波动方程

在微分形式的麦克斯韦方程组中，分别消去磁场和电场，就可以推导出电场和磁场随着时间和空间变化的方程，即电磁场的波动方程。为简单起见，假设电磁场在无限大的各向同性介质中传播，此时介电常数和磁导率都等于常数，并且介质中不存在自由电荷和传导电流，即 $\rho = 0$ ， $\boldsymbol{j} = 0$ ，利用物质方程，微分形式的麦克斯韦方程组式(1.1-18)可以简化为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.2-1}$$

对上式中的第三式取旋度后，将第四式代入其中，就可以消去磁场，从而得到

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H}) = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1.2-2}$$

利用场论公式可以得到

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{1.2-3}$$

并结合式(1.2-1)中的第一式，式(1.2-2)左边可以写成

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{1.2-4}$$

因此，式(1.2-2)可以改写为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2-5}$$

同样，式(1.2-1)中消去电场，也可以得到磁场所满足的方程：

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2-6}$$

若令

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{1.2-7}$$

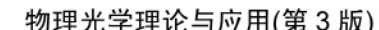
则电场和磁场所满足的方程化为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2-8}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2-9}$$

式中，υ 是电场和磁场在介质中的传播速度；$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ ，称为拉普拉斯算符(Laplacian operator)，表示对空间求二阶导数，它是一个标量。式(1.2-8)和式(1.2-9)分别称为电场和磁场的波动方程，通过解波动方程就可以得到各种形式的电磁波。





1.2.2 电磁波

现在人们已经知道，除了可见光波和无线电波外，X 射线、γ 射线也都是电磁波。通常所说的光学区或光学频谱，包括紫外线、可见光和红外线，波长为 10nm～1mm。可见光是人眼可以感觉到的各种颜色的光波。在真空中，可见光的波长为 380～760nm，频率为 7.89×10^{14}～3.95×10^{14}Hz。由于光波的频率较高，一般用波长来表示某一个或某一段频率的光波。红外线、可见光和紫外线又可以细分为

$$\text{红外线}(1\text{mm}\sim0.76\mu\text{m})\begin{cases}\text{远红外} & (1\text{mm}\sim20\mu\text{m})\\ \text{中红外} & (20\mu\text{m}\sim1.5\mu\text{m})\\ \text{近红外} & (1.5\mu\text{m}\sim0.76\mu\text{m})\end{cases}$$

$$\text{可见光}(760\text{nm}\sim380\text{nm})\begin{cases}\text{红色} & (760\text{nm}\sim620\text{nm})\\ \text{橙色} & (620\text{nm}\sim590\text{nm})\\ \text{黄色} & (590\text{nm}\sim570\text{nm})\\ \text{绿色} & (570\text{nm}\sim490\text{nm})\\ \text{青色} & (490\text{nm}\sim460\text{nm})\\ \text{蓝色} & (460\text{nm}\sim430\text{nm})\\ \text{紫色} & (430\text{nm}\sim380\text{nm})\end{cases}$$

$$\text{紫外线}(380\text{nm}\sim10\text{nm})\begin{cases}\text{近紫外} & (380\text{nm}\sim300\text{nm})\\ \text{中紫外} & (300\text{nm}\sim200\text{nm})\\ \text{远紫外} & (200\text{nm}\sim10\text{nm})\end{cases}$$

式(1.2-7)给出了电磁波在介质中的传播速度，因此，电磁波在真空中的传播速度为

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \tag{1.2-10}$$

电磁波在真空中的传播速度与其在介质中的传播速度之比称为绝对折射率(absolute index of refraction)，即

$$n=\frac{c}{\upsilon} \tag{1.2-11}$$

由式(1.2-7)和式(1.2-10)可得

$$n=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}} \tag{1.2-12}$$

式(1.2-12)将光学常数、电学常数和磁学常数联系在一起，表明了光的电磁性质。由于非磁性物质的磁导率近似等于真空中的磁导率，因而得到

$$n=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}} \tag{1.2-13}$$

式(1.2-12)或式(1.2-13)又称为麦克斯韦关系式。利用麦克斯韦关系式可以对各种物质的折射率进行计算。计算得到的数值与实验数值相比，对于一些化学结构简单的气体，两者符合得很好。但对于许多液体和固体，两者相差却很大。这是因为折射率 n 实际上与频率有关，即物质一般具有色散特性。对于简单气体，其色散较小，而液体和固体的色散则较大，关于物质的色散将在 3.3 节中进行讨论。



本节讨论了电磁场所满足的波动方程和电磁波，要点见表 1-2。

表 1-2　波动方程和电磁波

电　磁　场	真　空　中	介　质　中	麦克斯韦关系式
电　　场	$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$	$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$	$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$
磁　　场	$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0$	$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0$	

1.3　平面电磁波

通过解式(1.2-8)和式(1.2-9)这两个波动方程，可以得到很多形式的电场和磁场的解，如平面波、球面波和柱面波。要确定解的具体形式，必须根据电场和磁场所满足的边界条件和初始条件求解方程。本节将通过波动方程求解平面电磁波的解；给出平面电磁波的表示方法；并讨论平面电磁波的性质和平面电磁波的叠加。

1.3.1　平面电磁波的解

波源发出的振动在介质中传播经相同时间所到达的各点组成的面称为波阵面，简称波面，也称波前。对于同一阵面上各点来说，它们的振动位相相同。平面波是指波面是平面的光波。在直角坐标系(coordinate system)中解波动方程便可以解出平面电磁波的具体表达形式，先不考虑电场和磁场的方向，仅考虑其数值表达形式，对于电场有

$$\nabla^2 E - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \tag{1.3-1}$$

因为电场是时空函数，而且时间变量和空间变量是独立的，所以，电场总可以表达为时间函数和空间函数的乘积，则

$$E(r,t) = E(r)E(t) \tag{1.3-2}$$

将式(1.3-2)代入式(1.3-1)中，可以得到

$$E(t)\nabla^2 E(r) - \frac{1}{\upsilon^2}E(r)\frac{\partial^2 E(t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.3-3}$$

或者

$$\frac{\nabla^2 E(r)}{E(r)} = \frac{1}{\upsilon^2 E(t)}\frac{\partial^2 E(t)}{\partial t^2} \tag{1.3-4}$$

式(1.3-4)中比例系数可能为正也可能为负，如果取正，将得到电场随传输距离增加而增大的结果，这显然是不合理的，因此，比例系数只能取负。若令比例系数为 $-k^2$，则可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 E(t)}{\mathrm{d}t^2} + k^2\upsilon^2 E(t) = 0 \tag{1.3-5}$$

$$\nabla^2 E(r) + k^2 E(r) = 0 \tag{1.3-6}$$

式(1.3-5)是关于时间的二阶常系数线性齐次微分方程；式(1.3-6)是关于空间的二阶常系数线性齐次微分方程，它表示场随着空间的变化，该方程又称亥姆霍兹(Helmholtz)方程。

令

$$k^2\upsilon^2=\omega^2 \tag{1.3-7}$$

则式(1.3-5)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2E(t)}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2E(t)=0 \tag{1.3-8}$$

根据二阶常系数线性齐次微分方程的解法，式(1.3-8)的通解为

$$E(t)=B_1\exp(\mathrm{i}\omega t)+B_2\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{1.3-9}$$

因为式(1.3-6)与式(1.3-8)具有相同的形式，因此式(1.3-6)的通解可以写为

$$E(r)=C_1\exp(\mathrm{i}kr)+C_2\exp(-\mathrm{i}kr) \tag{1.3-10}$$

式(1.3-9)和式(1.3-10)中的 B_1、B_2、C_1、C_2 都是待定常数，ω 和 k 都具有角频率(angular frequency)的意义，分别称为时间角频率和空间角频率。k 本来是以比例系数的形式引进的，但对于确定的波动方程有确定的 k，因此，k 可以看作是波的特征量，将它定义为波数。根据式(1.3-7)可以得到 $k=\omega/\upsilon=2\pi\nu/(\lambda\nu)=2\pi/\lambda$，在前面解方程时是把电场看作标量，并没有考虑它的传播方向。现在引进一个矢量 $\boldsymbol{k}$，称其为波矢量(wave vector)，简称波矢，其数值等于 k，而它的方向与波的传播方向一致，即 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{k}_0$，$\boldsymbol{k}_0$ 为传播方向上的单位波矢。因此，电场的空间函数可以写为

$$E(r)=C_1\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})+C_2\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{1.3-11}$$

将式(1.3-9)和式(1.3-11)代入式(1.3-2)中可以得到 4 项，不考虑位相共轭项，则可以得到

$$E(\boldsymbol{r},t)=B_2C_1\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]+B_2C_2\exp[-\mathrm{i}(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.3-12}$$

式中，$B_2C_1和B_2C_2$ 称为振幅，ωt 称为时间位相，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 为空间位相，$\omega t\mp\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 为总位相。当波矢量与观察方向一致时，总位相为 $\omega t\mp kr$。如果位相恒定，即总位相 $\omega t\mp kr$ 为常数，取微分，可得

$$\omega\mathrm{d}t=\pm k\mathrm{d}r \tag{1.3-13}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\pm\frac{\omega}{k}=\pm\upsilon \tag{1.3-14}$$

因此，波动方程中最初定义的 $\upsilon=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ 有了确切的物理意义，即它表示等位相面传播的速度，通称为相速度(phase velocity)。速度为正表示正向传播的光波，速度为负表示反向传播的光波。因为正、反两个光波实际是同一光波的两个传播方向，因此，在讨论中只要研究正向光波即可。也就是把式(1.3-12)所表示的光波写成如下形式

$$E(\boldsymbol{r},t)=E_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.3-15}$$

式中，$E_0=B_2C_1$。如果考虑电场是矢量，在表示式中矢量必然表现在振幅中，则有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.3-16}$$

此外，在解方程时，若在解的指数中加上一个常数，其解仍然满足方程，所以在解的形式中还应包括一个常位相因子 δ_0，通常称为初位相，最后把光波表示成如下波函数：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\delta_0)] \tag{1.3-17}$$



同样，对磁场的波动方程求解可以得到

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{H}_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\delta_0)] \tag{1.3-18}$$

在许多光学问题中要求光的强度，由于光强度与振幅的平方成正比，因此，利用式(1.3-17)可以很方便地求出光的强度为：$I=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*$。

1.3.2　平面电磁波的表示方法

1. 复振幅形式

由复数形式的波函数式(1.3-17)可见，其位相因子包括空间位相因子和时间位相因子两部分，可以把它们分开写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\delta_0)]\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{1.3-19}$$

如果把振幅和空间位相因子部分写为

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\delta_0)] \tag{1.3-20}$$

式中，$\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ 称为复振幅。这样，波函数就等于复振幅 $\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ 和时间位相因子 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 的乘积。复振幅表示场振动随空间的变化，时间位相因子表示场振动随时间的变化。显然，对于简谐波传播到的空间各点，场振动的时间位相因子都相同，因此，在只关心光波电场在空间的强度分布时，例如，讨论光的干涉和衍射的强度分布时，时间位相因子通常可以略去不写，而只用复振幅来表示一个简谐波。

2. 实数形式

取式(1.3-17)的实部便可得到波函数的实数形式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\delta_0) \tag{1.3-21}$$

如果初位相为零，并且光波沿着 $\boldsymbol{r}$ 方向传播，则实数形式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \tag{1.3-22}$$

当波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向为任意时，并且它的方向余弦(即 $\boldsymbol{k}_0$ 在 x、y、z 坐标轴上的投影)为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，任意一点 P 的坐标为(x，y，z)，那么式(1.3-22)可以写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\cos[k(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)-\omega t] \tag{1.3-23}$$

当波矢 $\boldsymbol{k}$ 在 xOz 平面内，并沿着与 z 轴夹角为 θ 的方向传播时，实数形式为

$$\boldsymbol{E}(x,z,t)=\boldsymbol{E}_0\cos[k(x\sin\theta+z\cos\theta)-\omega t] \tag{1.3-24}$$

当波矢 $\boldsymbol{k}$ 沿着 z 轴方向时，实数形式为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}_0\cos(kz-\omega t) \tag{1.3-25}$$

1.3.3　平面电磁波的性质

1. 电磁波是横波

取式(1.3-17)的散度，可以得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\delta_0)]=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\delta_0)]=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} \tag{1.3-26}$$

因为麦克斯韦方程组中 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，因此有

$$\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{1.3-27}$$

式(1.3-27)表明，电场波动是横波，即电矢量的振动方向恒垂直于波的传播方向。同样，取式(1.3-18)的散度可以得到

$$\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{1.3-28}$$

式(1.3-28)表明，磁场波动也是横波，磁矢量的振动方向也恒垂直于波的传播方向。

2. ***E*** 和 ***H*** 相互垂直

由麦克斯韦方程组可知

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1.3-29}$$

将式(1.3-17)和式(1.3-18)代入式(1.3-29)，得到

$$\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{H} \tag{1.3-30}$$

因此，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 相互垂直。

3. ***E*** 和 ***B*** 同位相

由式(1.3-30)，可以得到

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\frac{k}{\omega}\boldsymbol{k}_0\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{\upsilon}\boldsymbol{k}_0\times\boldsymbol{E}=\sqrt{\varepsilon\mu}\boldsymbol{k}_0\times\boldsymbol{E}=\sqrt{\varepsilon\mu}\,k_0E\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{b} \tag{1.3-31}$$

式中，$\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 方向上的单位矢量。因此有

$$\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{B}}=\upsilon \tag{1.3-32}$$

在真空中，$\dfrac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{B}}=c$，即 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同位相，表明电磁波传播时电场和磁场同步变化。

综合以上几点，沿 z 轴方向传播、电矢量(electric vector)在 xOz 平面振动的平面波如图 1.1 所示。

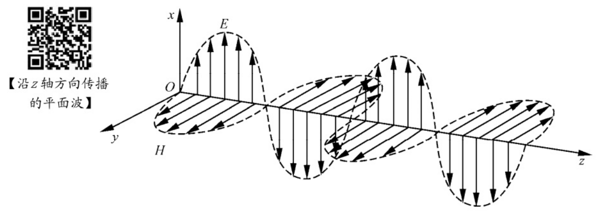
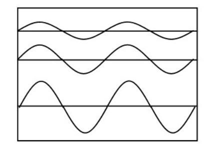


图 1.1　沿 z 轴方向传播的平面波

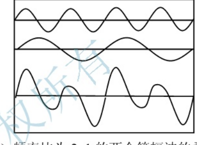


1.3.4　平面电磁波的叠加

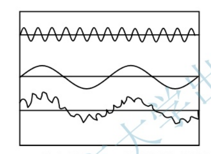
当两个以上光波在空间相遇时，在重叠区域内将发生光波的叠加问题。但有两点需要引起注意：一是几个波相遇后，仍保持它们原有的特性(频率、波长、振幅、振动方向和传播方向等)不变，并按照原来的方向继续前进，即各波互不干扰，这是波传播的独立性；二是在相遇区域内，任一点的振动为几个波单独存在时在该点所引起的振动的矢量和，这是波的矢量叠加原理。因此，当相遇光波的频率、振幅和位相都不相同时，光波的叠加是相当复杂的，如图 1.2 所示。以下只讨论两个频率相同、传播方向也相同的单色光波的叠加。



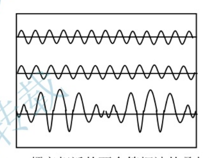
(a) 同频率不同振幅的两个波的叠加



(b) 频率比为 2:1 的两个等幅波的叠加



(c) 一个高频波和一个低频波的叠加



(d) 频率相近的两个等幅波的叠加

图 1.2　两个振动方向相同的同方向传播的波动的叠加

1. 代数加法

如果从光源 S_1 和 S_2 发出的两个光波的频率都为 ω，振动方向都在 x 方向，两个光波相交点 P 到 S_1 和 S_2 的距离分别为 r_1 和 r_2，则两个光波各自在 P 点产生的光振动分布函数可以写为

$$E_1 = E_{10}\cos(kr_1 - \omega t) \tag{1.3-33}$$

$$E_2 = E_{20}\cos(kr_2 - \omega t) \tag{1.3-34}$$

式中，E_{10}和E_{20}分别是两个光波在 P 点处的振幅，则在 P 点的合振动分布函数为

$$E = E_1 + E_2 = E_{10}\cos(kr_1 - \omega t) + E_{20}\cos(kr_2 - \omega t) \tag{1.3-35}$$

令 $\alpha_1 = kr_1$，$\alpha_2 = kr_2$，式(1.3-35)化为

$$E = E_{10}\cos(\alpha_1 - \omega t) + E_{20}\cos(\alpha_2 - \omega t) \tag{1.3-36}$$

由三角函数两角差的余弦公式，式(1.3-36)可以展开为

$$\begin{aligned} E &= E_{10}\cos\omega t\cos\alpha_1 + E_{10}\sin\omega t\sin\alpha_1 + E_{20}\cos\omega t\cos\alpha_2 + E_{20}\sin\omega t\sin\alpha_2 \\ &= (E_{10}\cos\alpha_1 + E_{20}\cos\alpha_2)\cos\omega t + (E_{10}\sin\alpha_1 + E_{20}\sin\alpha_2)\sin\omega t \end{aligned} \tag{1.3-37}$$

因为 E_{10}、E_{20} 和 α_1、α_2 都是常数，所以可令

$$(E_{10}\cos\alpha_1 + E_{20}\cos\alpha_2) = E_0\cos\alpha \tag{1.3-38}$$

$$(E_{10}\sin\alpha_1 + E_{20}\sin\alpha_2) = E_0\sin\alpha \tag{1.3-39}$$

因此，在 P 点的合振动可以写为

$$E = E_0\cos(\alpha - \omega t) \tag{1.3-40}$$

式(1.3-40)中， E_0 和 α 为待定常数。把式(1.3-38)和式(1.3-39)两式平方相加，可以得到

$$\begin{aligned} I = E_0^2 &= E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20}(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2) \\ &= E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20}\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \tag{1.3-41}$$

式中，I 称为相对强度(详见 1.9 节)。把式(1.3-38)和式(1.3-39)两式相除，可以得到

$$\tan\alpha = \frac{E_{10}\sin\alpha_1 + E_{20}\sin\alpha_2}{E_{10}\cos\alpha_1 + E_{20}\cos\alpha_2} \tag{1.3-42}$$

应当注意，如果两个光波的初位相不为零，则

$$E_1 = E_{10}\cos(kr_1 - \omega t + \delta_1) \tag{1.3-43}$$

$$E_2 = E_{20}\cos(kr_2 - \omega t + \delta_2) \tag{1.3-44}$$

此时可令

$$\begin{cases} \alpha_1 = kr_1 + \delta_1 \\ \alpha_2 = kr_2 + \delta_2 \end{cases} \tag{1.3-45}$$

2. *复数加法*

采用复数表达式时，光源 S_1 和 S_2 在 P 点产生的光振动可以写为

$$E_1 = E_{10}\exp[\mathrm{i}(kr_1 - \omega t)] \tag{1.3-46}$$

$$E_2 = E_{20}\exp[\mathrm{i}(kr_2 - \omega t)] \tag{1.3-47}$$

同样，若令 $\alpha_1 = kr_1$， $\alpha_2 = kr_2$， 则在 P 点的合振动为

$$\begin{aligned} E = E_1 + E_2 &= E_{10}\exp[\mathrm{i}(\alpha_1 - \omega t)] + E_{20}\exp[\mathrm{i}(\alpha_2 - \omega t)] \\ &= [E_{10}\exp(\mathrm{i}\alpha_1) + E_{20}\exp(\mathrm{i}\alpha_2)]\exp(-\mathrm{i}\omega t) \end{aligned} \tag{1.3-48}$$

式(1.3-48)括号内两复数之和仍然是一个复数，可以设为

$$E_0\exp(\mathrm{i}\alpha) = E_{10}\exp(\mathrm{i}\alpha_1) + E_{20}\exp(\mathrm{i}\alpha_2) \tag{1.3-49}$$

将式(1.3-49)代入式(1.3-48)，得到 P 点的合振动为

$$E = E_0\exp[\mathrm{i}(\alpha - \omega t)] \tag{1.3-50}$$

这一结果与式(1.3-40)相对应。根据复数运算规则，P 点处的光强为

$$\begin{aligned} I &= [E_0\exp(\mathrm{i}\alpha)][E_0\exp(\mathrm{i}\alpha)]^* \\ &= [E_{10}\exp(\mathrm{i}\alpha_1) + E_{20}\exp(\mathrm{i}\alpha_2)][E_{10}\exp(\mathrm{i}\alpha_1) + E_{20}\exp(\mathrm{i}\alpha_2)]^* \\ &= E_{10}^2 + E_{20}^2 + E_{10}E_{20}\{\exp[\mathrm{i}(\alpha_2 - \alpha_1)] + \exp[-\mathrm{i}(\alpha_2 - \alpha_1)]\} \\ &= E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20}\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \tag{1.3-51}$$

将式(1.3-49)等号右边的复数展开为三角函数形式，可以得到

$$E_0\exp(\mathrm{i}\alpha) = E_{10}\cos\alpha_1 + E_{20}\cos\alpha_2 + \mathrm{i}(E_{10}\sin\alpha_1 + E_{20}\sin\alpha_2) \tag{1.3-52}$$



根据复数的性质，得到

$$\tan\alpha = \frac{E_{10}\sin\alpha_1 + E_{20}\sin\alpha_2}{E_{10}\cos\alpha_1 + E_{20}\cos\alpha_2} \tag{1.3-53}$$

可见，复数加法与代数加法得到的结果完全相同。

本节通过对波动方程的求解给出了平面电磁波的表示方法，并讨论了平面电磁波的性质和平面电磁波的叠加，要点见表 1-3。

表 1-3　平面电磁波及其性质

表达形式	实数表达式	$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_0)$
	复数表达式	$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \delta_0)]\exp(-\mathrm{i}\omega t)$
基本性质	平面波是横波	$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{H}\perp\boldsymbol{k}$
	$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同位相	$\boldsymbol{E}/\boldsymbol{B} = \upsilon$
	$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 正交	$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$
频率相同、传播方向也相同的平面波叠加	合成波	$E = E_0\cos(\alpha - \omega t)$或$E = E_0\exp[\mathrm{i}(\alpha - \omega t)]$
	振幅	$E_0 = \sqrt{E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20}\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$
	位相	$\tan\alpha = (E_{10}\sin\alpha_1 + E_{20}\sin\alpha_2)/(E_{10}\cos\alpha_1 + E_{20}\cos\alpha_2)$

1.4　球面波和柱面波

除了平面波以外，球面波和柱面波也是两种常见的光波，在各向同性介质中，它们分别由点光源和线光源产生。本节将讨论球面波和柱面波的特点和表示方式。

1.4.1　球面波

如果在真空或均匀介质中的 O 点放一个点光源，那么从 O 点发出的光波将以相同的速度向各个方向传播，经过一定时间以后，电磁振动所达到的各点将构成一个以 O 点为中心的球面，即波前是球面，称这种光波为球面波，如图 1.3 所示。

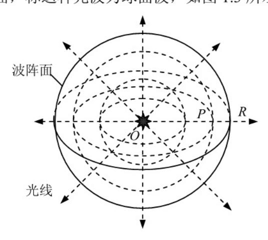


图 1.3　点光源产生球面波示意图

球面波所满足的波动方程仍然是 1.2 节的式(1.2-8)和式(1.2-9)，与解平面波相类似，球面波仍然可以表示为

$$E(r,t)=E(r)E(t) \tag{1.4-1}$$

因此，仍然可以得到

$$E(t)=B_1\exp(\mathrm{i}\omega t)+B_2\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{1.4-2}$$

由于 $E(r)$ 只与 r 有关，因此，亥姆霍兹方程 $\nabla^2E(r)+k^2E(r)=0$ 需要在球坐标下求解，在球坐标下拉普拉斯算符为

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{1.4-3}$$

1. 式(1.4-3)的证明

因为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，所以有

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{x}{r} \tag{1.4-4}$$

因此，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{x}{r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial r}\frac{x}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial(x/r)}{\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial r}\frac{x}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r-x(\partial r/\partial x)}{r^2}\right]\\&=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r-x(x/r)}{r^2}\right]=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right]\end{aligned} \tag{1.4-5}$$

同理，可得

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{y^2}{r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right] \tag{1.4-6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{z^2}{r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right] \tag{1.4-7}$$

由 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 可以得到在球坐标下拉普拉斯算符为

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

因此，球坐标下亥姆霍兹方程为

$$\frac{\partial^2E(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial E(r)}{\partial r}+k^2E(r)=0 \tag{1.4-8}$$

因为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rE(r)\right]=\frac{\partial^2E(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial E(r)}{\partial r} \tag{1.4-9}$$



2. 式(1.4-9)的证明

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rE(r)\right]=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rE(r)\right]=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[E(r)+r\frac{\partial E(r)}{\partial r}\right]$$
$$=\frac{1}{r}\frac{\partial E(r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial E(r)}{\partial r}+\frac{\partial^2 E(r)}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 E(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial E(r)}{\partial r}$$

因此，式(1.4-8)可以改写为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rE(r)\right]+k^2\left[rE(r)\right]=0 \tag{1.4-10}$$

由此可以得到

$$rE\left(r\right)=C_1\exp(\mathrm{i}kr)+C_2\exp(-\mathrm{i}kr) \tag{1.4-11}$$

将式(1.4-2)和式(1.4-11)代入式(1.4-1)中可以得到 4 项，不考虑位相共轭项则可以得到

$$E\left(r,t\right)=\frac{E_1}{r}\exp\left[-\mathrm{i}(\omega t-kr)\right]+\frac{E_2}{r}\exp\left[-\mathrm{i}(\omega t+kr)\right] \tag{1.4-12}$$

可见，球面波的振幅随着传播距离的增加而减小。如果位相恒定，即总位相 $\omega t\mp kr$ 为常数。取微分，可得

$$\omega\mathrm{d}t=\pm k\mathrm{d}r \tag{1.4-13}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\pm\frac{\omega}{k}=\pm\upsilon \tag{1.4-14}$$

速度为正表示发散球面波，速度为负表示会聚球面波。在实际中，经常讨论的是点光源发出的发散球面波，也就是把球面波写成如下形式：

$$\boldsymbol{E}(r,t)=\frac{\boldsymbol{E}}{r}\exp\left[-\mathrm{i}(\omega t-kr)\right] \tag{1.4-15}$$

1.4.2　柱面波

一个各向同性的无限长线光源，向外发射的光波是柱面波，其等相面是以线光源为中心，随着距离的增大而逐渐展开的同轴圆柱面，即波前是柱面，如图 1.4 所示，称这种光波为柱面波。

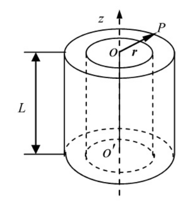


图 1.4　线光源产生柱面波示意图

柱面波所满足的波动方程仍然是 1.2 节的式(1.2-8)和式(1.2-9)，与解球面波相类似，在圆柱坐标下求解，柱面波也可以表示为

$$E(r,t)=E(r)E(t) \tag{1.4-16}$$

因此，仍然可以得到

$$E(t)=B_1\exp(\mathrm{i}\omega t)+B_2\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{1.4-17}$$

由于 $E(r)$ 是 r 的函数，因此，亥姆霍兹方程 $\nabla^2E(r)+k^2E(r)=0$ 需要在柱坐标下求解。根据 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ，可以得到柱坐标下拉普拉斯算符为

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{1.4-18}$$

式(1.4-18)的证明与式(1.4-3)类似。因此，柱坐标下亥姆霍兹方程为

$$\frac{\partial^2E(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E(r)}{\partial r}+k^2E(r)=0 \tag{1.4-19}$$

注意到

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\sqrt{r}E(r)\right]=\frac{\partial^2E(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E(r)}{\partial r}-\frac{E(r)}{4r^2} \tag{1.4-20}$$

式(1.4-20)证明：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\sqrt{r}E(r)\right]&=\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\sqrt{r}E(r)\right]=\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2\sqrt{r}}E(r)+\sqrt{r}\frac{\partial E(r)}{\partial r}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{r}}\left[-\frac{1}{4}\frac{E(r)}{r\sqrt{r}}+\frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial E(r)}{\partial r}+\frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial E(r)}{\partial r}+\sqrt{r}\frac{\partial^2E(r)}{\partial r^2}\right]\\&=\frac{\partial^2E(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E(r)}{\partial r}-\frac{1}{4}\frac{E(r)}{r^2}\end{aligned} \tag{1.4-21}$$

因此，式(1.4-19)可以改写为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\sqrt{r}E(r)\right]+\left(k^2+\frac{1}{4r^2}\right)\left[\sqrt{r}E(r)\right]=0 \tag{1.4-22}$$

由于 $k^2\gg1/(4r^2)$，因此，式(1.4-22)又可以改写为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\sqrt{r}E(r)\right]+k^2\left[\sqrt{r}E(r)\right]=0 \tag{1.4-23}$$

因此得到

$$\sqrt{r}E(r)=C_1\exp(\mathrm{i}kr)+C_2\exp(-\mathrm{i}kr) \tag{1.4-24}$$

将式(1.4-17)和式(1.4-24)代入式(1.4-16)可以得到 4 项。同样，不考虑位相共轭项，则可以得到

$$E(r,t)=\frac{E_1}{\sqrt{r}}\exp\left[-\mathrm{i}(\omega t-kr)\right]+\frac{E_2}{\sqrt{r}}\exp\left[-\mathrm{i}(\omega t+kr)\right] \tag{1.4-25}$$

可见，柱面波的振幅也随着传播距离的增加而减小。对于发散柱面波可以表示为

$$\boldsymbol{E}(r,t)=\frac{\boldsymbol{E}}{\sqrt{r}}\exp\left[-\mathrm{i}(\omega t-kr)\right] \tag{1.4-26}$$



1.4.3　球面波和柱面波的近似求法

由图 1.3 所示的球面波的空间对称性可以知道，只要研究 OR 方向上各点的电磁场的变化规律，就可以了解整个空间电磁场的情况。

考虑波动沿 OR 方向传播，显然距离点光源 O 为 r 的 P 点的位相为 $(kr-\omega t)$。若 P 点振幅用 E_r 表示，则 P 点电场振动可以表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_r\exp\left[\mathrm{i}(kr-\omega t)\right] \tag{1.4-27}$$

对于球面波来说，其振幅 E_r 是随距离 r 变化的，设距离点光源单位距离的 P_1 点和与点光源的距离为 r 的 P 点的光强分别为 I_1 和 I_P，则有

$$I_1\times 4\pi=I_P\times 4\pi r^2$$

因此

$$I_1/I_P=r^2 \tag{1.4-28}$$

由于光强度与振幅的平方成正比，所以

$$I_1/I_P=E_1^2/E_r^2 \tag{1.4-29}$$

从而得到

$$E_r=\frac{E_1}{r}$$

因此，得到球面波的表达式为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{E}_1}{r}\exp\left[\mathrm{i}(kr-\omega t)\right] \tag{1.4-30}$$

容易看出，球面波的振幅不再是常数，它与离开波源的距离 r 成反比；球面波的等相面是“$r=$常量”的球面。

由图 1.4 所示的柱面波的空间对称性可以知道，只要研究 $\boldsymbol{r}$ 方向上各点的电磁场的变化规律，就可以了解整个空间电磁场的情况。

考虑波动沿 $\boldsymbol{r}$ 方向传播，显然距离线光源 OO' 为 r 的 P 点的位相为 $(kr-\omega t)$。若 P 点振幅用 E_r 表示，则 P 点电场振动可以表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_r\exp\left[\mathrm{i}(kr-\omega t)\right] \tag{1.4-31}$$

对于柱面波来说，其振幅 E_r 是随距离 r 变化的，设距离线光源单位距离的 P_1 点和距离线光源为 r 的 P 点的光强分别为 I_1 和 I_P，则有

$$I_1 2\pi L=I_P 2\pi rL$$

因此

$$I_1/I_P=r \tag{1.4-32}$$

由于光强度与振幅的平方成正比，所以

$$I_1/I_P=E_1^2/E_r^2 \tag{1.4-33}$$

从而得到

$$E_r=\frac{E_1}{\sqrt{r}}$$

因此，得到柱面波的表达式为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{E}_1}{\sqrt{r}}\exp\left[\mathrm{i}(kr-\omega t)\right] \tag{1.4-34}$$

不难看出，柱面波的振幅也不再是常数，它与离开波源的距离 $\sqrt{r}$ 成反比；柱面波的等相面是“$r=$常量”的柱面。

由 1.3 节和 1.4 节的讨论可以知道，平面波、球面波和柱面波存在的主要差异有 3 个方面：一是平面波、球面波和柱面波表达式的坐标不同，分别采用的是直角坐标系、球坐标系和柱坐标系；二是振幅的表现形式不同，平面波的振幅是恒定的，球面波和柱面波的振幅随着传播距离的增加而减小，且球面波衰减得更快；三是“$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=$常数”所表示的意义不同，在平面波中表示平面，在球面波中表示球面，在柱面波中表示柱面。

本节讨论了球面波和柱面波的特点和表示方式，要点见表 1-4。

表 1-4　平面波、球面波和柱面波

光波的种类	光　源	波 阵 面	表 达 式
平面波	光源位于无限远处或透镜焦点上	平面	$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right]$
球面波	点光源	球面	$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{E}_0}{r}\exp\left[\mathrm{i}(kr-\omega t)\right]$
柱面波	线光源	柱面	$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{E}_0}{\sqrt{r}}\exp\left[\mathrm{i}(kr-\omega t)\right]$

1.5　光驻波

在 1.3 节中讨论了两个频率、振动方向和传播方向都相同的单色光波的叠加，本节将讨论两个频率相同、振动方向相同而传播方向相反的单色光波叠加以后所产生的光驻波。

1.5.1　波节与波腹

假设反射面是 $z=0$ 的平面，z 的正方向指向入射波所在的介质，介质折射率为 n_1；反射面后面的介质折射率为 n_2，如图 1.5 所示。

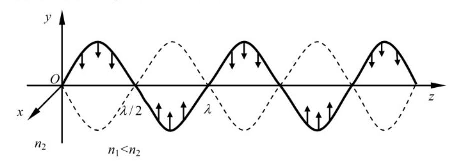


图 1.5　光驻波示意图

为了简化问题的讨论，假定两种介质分界面的反射率很高，可以认为反射波和入射波的振幅相等。这样可以把入射波和反射波写为

$$E_1 = E_0\cos(kz+\omega t) \tag{1.5-1}$$

$$E_1' = E_0\cos(kz-\omega t+\delta) \tag{1.5-2}$$

式中，δ 是反射时的位相变化。入射波和反射波叠加以后所产生的光驻波为

$$E = E_1 + E_1' = 2E_0\cos\left(kz+\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\omega t-\frac{\delta}{2}\right) \tag{1.5-3}$$

式(1.5-3)表明，驻波在 z 方向上每一点的振动仍然是频率为 ω 的简谐振动，振动的振幅为

$$E_0' = 2E_0\cos\left(kz+\frac{\delta}{2}\right) \tag{1.5-4}$$

可见，振幅随着 z 的变化而变化，即不同 z 值的点将有不同的振幅。振幅为零的点称为波节(standing wave node)。在相邻的两个波节之间的中点是振幅最大点，称为波腹(standing wave loop)。由式(1.5-4)可知，波节的位置由下式决定，即

$$\cos\left(kz+\frac{\delta}{2}\right)=0\text{，或者}\quad kz+\frac{\delta}{2}=n\frac{\pi}{2}\ (n=1,\ 3,\ 5,\cdots) \tag{1.5-5}$$

而波腹的位置由下式决定，即

$$\left|\cos\left(kz+\frac{\delta}{2}\right)\right|=1\text{，或者}\quad kz+\frac{\delta}{2}=n\frac{\pi}{2}\ (n=2,\ 4,\ 6,\cdots) \tag{1.5-6}$$

由式(1.5-5)可知，当 $z=0$ 时，$n=1$，因此，$\delta=\pi$。也就是说 $z=0$ 的点形成的是波节，而且，入射波和反射波的位相差 $\delta=\pi$。相邻两个波节或波腹之间的距离可由 $k\Delta z=\Delta n\dfrac{\pi}{2}$ 求得，$\Delta z=\lambda/2$，并且波节与最靠近的波腹之间的距离为 $\lambda/4$。

由于位相因子 $\cos\left(\omega t-\dfrac{\delta}{2}\right)$ 与 z 无关，因此，式(1.5-3)所表示的光波不会沿着 z 方向传播，所以，该光波称为驻波。相应地，沿着某一方向传播的光波则称为行波。另外，由于振幅因子 $\cos\left(kz+\dfrac{\delta}{2}\right)$ 在波节处经零值改变符号，所以，在每一个波节两边的点的振动位相是相反的。

应当注意，如果两介质分界面上的反射率不是 1，则入射波与反射波的振幅不等，这时合成波除了驻波外还有一个行波，因此，波节处的振幅不再等于零，并且由于包含行波，将有能量的传播。

1.5.2　光驻波实验

维纳(Wiener)在 1890 年首先做了光驻波实验，如图 1.6 所示。M 为平面镜，前表面镀了银，由一束准单色平行光垂直照射。F 是透明照相乳胶膜，涂在玻璃板 G 的平表面上，厚度不超过波长的 1/20。

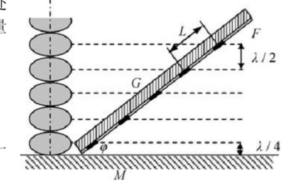


图 1.6　维纳光驻波实验装置示意图

涂有乳胶膜的玻璃板 G 放在镜 M 之前，与 M 有一个很小的倾角。准单色的平行光在平面镜上反射与入射光形成光驻波，在波腹处使乳胶感光，因此显影后这些地方变黑，而在波节处感光乳胶不起变化。由图 1.6 可知，乳胶膜上黑纹之间的距离为

$$L=\frac{\lambda}{2\sin\varphi} \tag{1.5-7}$$

维纳的实验，一方面证实了光驻波的存在，另一方面也证实了光波中对乳胶起感光作用的主要是电矢量而不是磁矢量。通过前面的讨论知道，光在光疏介质到光密介质分界面上反射时，电矢量有位相跃变π，但是磁矢量没有位相跃变，如图 1.7 所示。所以，电场反射后形成的光驻波在分界面上是波节，而磁场反射后形成的光驻波在分界面上是波腹，如图 1.8 所示。

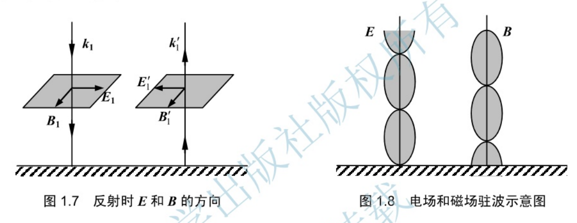


图 1.7　反射时 E 和 B 的方向　　　　图 1.8　电场和磁场驻波示意图

实验结果证明，乳胶膜上第一条黑纹不与镜面重合，它在距离镜面 1/4 波长的地方，说明是电驻波的波腹对乳胶感光，即乳胶感光主要是电场起作用。维纳做了进一步实验，把涂了乳胶的平板压在一个凸球面反射镜上，结果发现接触镜面地方的乳胶没有变黑，而这个地方是磁场波腹。因此，变黑的地区对应于电场的波腹，也就是说，光化学作用直接与电矢量有关，而与磁矢量无关。

本节讨论了光驻波及其验证实验，本节要点见表 1-5。

表 1-5　光驻波

光驻波表达式	波腹条件	波节条件	相邻波腹/波节间距
$E=2E_0\cos\left(kz+\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\omega t-\frac{\delta}{2}\right)$	$\left\|\cos\left(kz+\frac{\delta}{2}\right)\right\|=1$	$\cos\left(kz+\frac{\delta}{2}\right)=0$	$\lambda/2$

1.6　复 色 光 波

无论多少个频率相同而有任意振幅和位相的单色波叠加，所得到的合成波仍然是单色光波。但是，若把两个频率不同的单色波叠加起来，其结果就不再是单色波，而是一个复色波。本节将讨论传播方向、振动方向相同，振幅相等而频率相差很小的两



个单色光波叠加后形成的复色光波；复色光波的相速度和群速度。

1.6.1　光学拍

设振幅同为 E_{00}，角频率分别为 ω_1 和 ω_2 的两个单色波沿着 z 的方向传播，它们的实数形式的波函数为

$$E_1 = E_{00}\cos(k_1 z - \omega_1 t) \tag{1.6-1}$$

$$E_2 = E_{00}\cos(k_2 z - \omega_2 t) \tag{1.6-2}$$

这两个光波叠加得到

$$E = E_1 + E_2 = E_{00}\left[\cos(k_1 z - \omega_1 t) + \cos(k_2 z - \omega_2 t)\right] \tag{1.6-3}$$

应用三角函数公式：$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$，合成波可以写为

$$E = 2E_{00}\cos\left[\frac{(k_1+k_2)z-(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right]\cos\left[\frac{(k_1-k_2)z-(\omega_1-\omega_2)t}{2}\right] \tag{1.6-4}$$

引入平均角频率、平均波数、调制角频率和调制波数：

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2};\quad \bar{k} = \frac{k_1+k_2}{2};\quad \omega_{\mathrm{m}} = \frac{\omega_1-\omega_2}{2};\quad k_{\mathrm{m}} = \frac{k_1-k_2}{2}$$

则式(1.6-4)可以简化为

$$E = 2E_{00}\cos(k_{\mathrm{m}}z - \omega_{\mathrm{m}}t)\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t) \tag{1.6-5}$$

若令 $E_0 = 2E_{00}\cos(k_{\mathrm{m}}z - \omega_{\mathrm{m}}t)$，式(1.6-5)又可以写为

$$E = E_0\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t) \tag{1.6-6}$$

此式表示合成波可以看作是一个频率为 $\bar{\omega}$，而振幅受到调制的波。

如果用复数表示，则两个光波可以写为

$$E_1 = E_{00}\exp\left[\mathrm{i}\left(k_1 z - \omega_1 t\right)\right] \tag{1.6-7}$$

$$E_2 = E_{00}\exp\left[\mathrm{i}\left(k_2 z - \omega_2 t\right)\right] \tag{1.6-8}$$

这两个光波叠加得到

$$E = E_1 + E_2 = E_{00}\exp\left\{\left[\mathrm{i}(k_1 z - \omega_1 t)\right] + \exp\left[\mathrm{i}(k_2 z - \omega_2 t)\right]\right\} \tag{1.6-9}$$

利用

$$\exp(\mathrm{i}\alpha) + \exp(\mathrm{i}\beta) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left\{\exp\left[-\mathrm{i}\frac{\beta-\alpha}{2}\right] + \exp\left[\mathrm{i}\frac{\beta-\alpha}{2}\right]\right\}$$

则合成波可以写为

$$E = 2E_{00}\exp\left[\mathrm{i}\frac{(k_1+k_2)z-(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right]\cos\left[\frac{(k_1-k_2)z-(\omega_1-\omega_2)t}{2}\right] \tag{1.6-10}$$

引入平均角频率和平均波数，以及调制角频率和调制波数可以得到

$$E = 2E_{00}\cos(k_{\mathrm{m}}z-\omega_{\mathrm{m}}t)\exp\left[\mathrm{i}(\bar{k}z-\bar{\omega}t)\right] \tag{1.6-11}$$

同样，若令 $E_0 = 2E_{00}\cos(k_{\mathrm{m}}z-\omega_{\mathrm{m}}t)$，式(1.6-11)又可以写为

$$E = E_0\exp\left[\mathrm{i}(\bar{k}z-\bar{\omega}t)\right] \tag{1.6-12}$$

图 1.9 表示了这样两个光波的叠加情况，其中图 1.9(a)表示两个单色波，图 1.9(b)是合成波，图 1.9(c)是合成波振幅的变化曲线，图 1.9(d)是合成波强度的变化曲线。

(a) 两个单色波

(b) 合成波

(c) 合成波振幅的变化曲线

(d) 合成波强度的变化曲线

图 1.9 频率不同的两个光波的叠加



由于光的频率很高，若 $\omega_1 \approx \omega_2$，则 $\bar{\omega} \gg \omega_m$，因而振幅 E_0 变化缓慢而场振动 E 变化极快。合成光波的强度为

$$I = 4E_{00}^2 \cos^2\left[k_m z - \omega_m t\right] \tag{1.6-13}$$

或

$$I = 2E_{00}^2\left[1 + \cos 2(k_m z - \omega_m t)\right] \tag{1.6-14}$$

可见，合成光波的强度在 0 和 $4E_{00}^2$ 之间进行周期性变化，这种强度时大时小的现象称为拍。由式(1.6-14)可知，拍频为 $2\omega_m$，即等于振幅调制频率的两倍，或者等于 $(\omega_1 - \omega_2)$，即两叠加单色光波频率之差。光学拍的测量为微小频率差的检测提供了一种很好的方法。

1.6.2　相速度与群速度

通过以上的讨论知道，两个单色波的合成是一个较复杂的光波，它包含两个传播速度：等相面传播的速度和等幅面传播的速度，前者就是这个合成光波的相速度，它可以由位相不变条件($\bar{k}z - \bar{\omega}t$=常数)求出

$$\upsilon_p = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \tag{1.6-15}$$

后者是合成光波振幅恒值点移动的速度，即振幅包络移动的速度，这一速度又称群速度。它可由振幅不变条件($k_m z - \omega_m t$=常数)求出

$$\upsilon_g = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \tag{1.6-16}$$

当 $\Delta\omega$ 很小时，式(1.6-16)可以写成

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{1.6-17}$$

由式(1.6-17)可以得到群速度和相速度的关系为

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(k\upsilon_p)}{dk} = \upsilon_p + k\frac{d\upsilon_p}{dk} \tag{1.6-18}$$

式(1.6-18)适用于色散关系由函数 $\upsilon_p(k)$ 来描述的场合。由于 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$，$dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$，因此，式(1.6-18)还可以表示为

$$\upsilon_g = \upsilon_p - \lambda\frac{d\upsilon_p}{d\lambda} \tag{1.6-19}$$

式(1.6-19)适用于色散关系由函数 $\upsilon_p(\lambda)$ 来描述的场合。由于 $\upsilon_p = \frac{c}{n}$，$\frac{d\upsilon_p}{d\lambda} = -\frac{c}{n^2}\cdot\frac{dn}{d\lambda}$，因此式(1.6-19)还可以表示为

$$\upsilon_g = \upsilon_p\left(1 + \frac{\lambda}{n}\cdot\frac{dn}{d\lambda}\right) \tag{1.6-20}$$

式(1.6-20)适用于色散关系由函数 $n(\lambda)$ 来描述的场合。对于正常色散介质，$\mathrm{d}\upsilon_{\mathrm{p}}/\mathrm{d}\lambda > 0$，或 $\mathrm{d}\upsilon_{\mathrm{p}}/\mathrm{d}k < 0$，或 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda < 0$，此时，$\upsilon_{\mathrm{g}} < \upsilon_{\mathrm{p}}$；对于非正常色散介质，$\mathrm{d}\upsilon_{\mathrm{p}}/\mathrm{d}\lambda < 0$，或 $\mathrm{d}\upsilon_{\mathrm{p}}/\mathrm{d}k > 0$，或 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda > 0$，此时，$\upsilon_{\mathrm{g}} > \upsilon_{\mathrm{p}}$；对于无色散的介质，$\mathrm{d}\upsilon_{\mathrm{p}}/\mathrm{d}\lambda = 0$，或 $\mathrm{d}\upsilon_{\mathrm{p}}/\mathrm{d}k = 0$，或 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda = 0$，此时，$\upsilon_{\mathrm{g}} = \upsilon_{\mathrm{p}}$。通常，单色波的相速度都用 υ 来直接表示。

以上讨论了两个频率相差很小的单色光波的叠加。可以证明，对于多个不同频率的单色光合成的复色波，只要各个波的频率相差不大，它们只集中在某一“中心”频率附近，同时介质的色散又不大，则仍然可以讨论复色波的群速度问题，并且式(1.6-18)～式(1.6-20)仍然适用。

应当注意的是，复色波的群速度可以看作是振幅最大点的移动速度，而波动携带的能量与振幅的平方成正比，所以，群速度也可以看作是光能量或光信号的传播速度。

本节讨论了传播方向、振动方向相同，振幅相等而频率相差很小的两个单色光波的叠加后形成的复杂光波及其相速度和群速度，要点见表 1-6。

表 1-6　复杂光波的基本特性

速　　度			频　　率		波　　数	
群速度	相速度	群速度与相速度的关系	调制频率	平均频率	调制波数	平均波数
$\upsilon_{\mathrm{g}} = \dfrac{\omega_{\mathrm{m}}}{k_{\mathrm{m}}}$	$\upsilon_{\mathrm{p}} = \dfrac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$	$\upsilon_{\mathrm{g}} = \upsilon_{\mathrm{p}} - \lambda\dfrac{\mathrm{d}\upsilon_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\lambda}$	$\omega_{\mathrm{m}} = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$	$\bar{\omega} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$	$k_{\mathrm{m}} = \dfrac{k_1 - k_2}{2}$	$\bar{k} = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$

1.7　电磁场的边值关系

在光学中，常常要处理光波从一种介质到另一种介质的问题，由于两种介质的物理性质不同，在两种介质的分界面上电磁场将是不连续的，但它们存在一定的关系，称这种关系为电磁场的边值关系。本节将讨论 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 在两种介质的分界面处所满足的关系。

1.7.1　磁感应强度与电感应强度所满足的边值关系

由于分界面上电磁场量的跃变，微分形式的麦克斯韦方程组不再适用，这时可用积分形式的麦克斯韦方程组来研究边值关系：



$$\begin{cases} \oiint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = Q \\ \oiint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \\ \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\ \oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I + \iint \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \end{cases} \tag{1.7-1}$$

在绝缘介质界面上，自由面电荷和面电流为零，此时假想在分界面上做出一个扁平的小圆柱，高为 δh，面积为 δs，如图 1.10 所示。把麦克斯韦方程组的第二式应用于小圆柱体，可得到

$$\oiint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}S = \left(\iint_{顶} + \iint_{底} + \iint_{壁}\right)\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \tag{1.7-2}$$

因为圆柱体上下表面很小，在此段范围内 $\boldsymbol{B}$ 可以认为是常数，在介质 1 和介质 2 中分别为 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$。当圆柱体高趋于零时，上式第三项的积分趋于零，因此

$$\iint_{顶} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \iint_{底} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \tag{1.7-3}$$

即

$$\boldsymbol{B}_1\cdot \boldsymbol{n}_1 \delta s + \boldsymbol{B}_2\cdot \boldsymbol{n}_2 \delta s = 0 \tag{1.7-4}$$

$\boldsymbol{n}_1$和$\boldsymbol{n}_2$ 分别为圆柱体上下表面外法线方向的单位矢量，以 $\boldsymbol{n}$ 表示分界面的法线方向的单位矢量，则

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2 \tag{1.7-5}$$

从而得到

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2\right) = 0 \tag{1.7-6}$$

即法向分量

$$\boldsymbol{B}_{1n} = \boldsymbol{B}_{2n} \tag{1.7-7}$$

式(1.7-7)表明，在通过分界面时磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 虽然整体发生跃变，但它的法向分量却是连续的。对于电感应强度 $\boldsymbol{D}$，把麦克斯韦方程组的第一式应用于小圆柱体，可得到

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2\right) = 0 \tag{1.7-8}$$

即在分界面上没有自由面电荷的情况下，电感应强度的法向分量也是连续的。

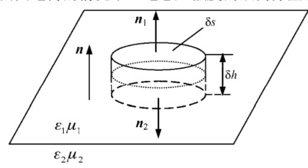


图 1.10　分界面上的假想小圆柱体

1.7.2 电场强度与磁场强度所满足的边值关系

如果在两种介质的分界面处取一个长方形，如图 1.11 所示，把麦克斯韦方程组的第三式应用于该长方形，则有

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right)\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.7-9}$$

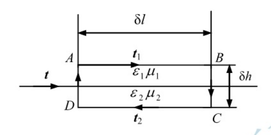


图 1.11 分界面处的假想长方形

由于 AB 和 CD 的长度很短，在两线段范围内，$\boldsymbol{E}$ 可以认为是常数，在介质 1 和介质 2 中分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$。当 BC 和 AD 趋于零时，对 BC 和 AD 的积分趋于零，并且，长方形面积趋于零。由于磁场随时间的变化为有限量，因此

$$\int_{AB}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{CD}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{1.7-10}$$

即

$$\boldsymbol{E}_1\cdot \boldsymbol{t}_1\delta l+\boldsymbol{E}_2\cdot \boldsymbol{t}_2\delta l=0 \tag{1.7-11}$$

$\boldsymbol{t}_1$和$\boldsymbol{t}_2$分别为沿 AB 和 CD 切线方向的单位矢量，以 $\boldsymbol{t}$ 表示分界面的切线方向的单位矢量，则

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}_1=-\boldsymbol{t}_2 \tag{1.7-12}$$

因此得到

$$(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)\cdot \boldsymbol{t}=0 \tag{1.7-13}$$

即切向分量为

$$\boldsymbol{E}_{1t}=\boldsymbol{E}_{2t} \tag{1.7-14}$$

式(1.7-14)表明，在通过分界面时电场强度的切向分量是连续的。由式(1.7-13)可以看出，$\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2$ 垂直于界面，即平行于界面法线 $\boldsymbol{n}$，则式(1.7-13)可以改写成

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0 \tag{1.7-15}$$

同样，在没有面电流的情况下，由麦克斯韦方程组的第四式可以得到

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=0 \tag{1.7-16}$$

可见，在两种介质的分界面上电磁场整体是不连续的，但在界面没有自由电荷和面电流的情况下，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量及 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量则是连续的。式(1.7-6)、式(1.7-8)、式(1.7-15)和式(1.7-16)就是电磁场的边值关系。

应当注意的是，在良导体表面，电荷面密度为 ρ 、电流线密度为 $\boldsymbol{j}$ 时，要将式(1.7-8)和式(1.7-16)分别改为

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho \tag{1.7-17}$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{j} \tag{1.7-18}$$

电磁场的边值关系是处理光在介质分界面处发生反射和折射时电磁场变化的基本关系，由此关系可以得到光在介质分界面处反射和折射的基本规律。

本节讨论了电磁场在两种介质的分界面处所满足的边值关系，要点见表 1-7。

表 1-7　电磁场的边值关系

界面 / 电磁场	绝缘介质界面	导体介质界面
电　场	$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0$；$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=0$	$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0$；$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho$
磁　场	$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=0$；$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0$	$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{j}$；$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0$

1.8　光在介质表面的反射与折射

当一个单色平面波射到两种不同介质的分界面上时，将分成两个波：一个反射波和一个折射波。从电磁场的边值关系可以证明这两个波的存在，并求出它们的传播方向以及它们与入射波的振幅关系和位相关系。本节将讨论光在两种不同介质的分界面处发生反射和折射时所满足的基本规律。

1.8.1　入、反、折三波的频率关系与波矢关系

假设单色平面波从介质 1 射到分界面上，如图 1.12 所示，设入射波、反射波和折射波的波矢量分别为 $\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_1'$ 和 $\boldsymbol{k}_2$，角频率分别为 ω_1、ω_1' 和 ω_2，那么，3 个波可以分别表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_{10}\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t)\right]\\ \boldsymbol{E}_1'=\boldsymbol{E}_{10}'\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1' t)\right]\\ \boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{20}\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t)\right]\end{cases} \tag{1.8-1}$$

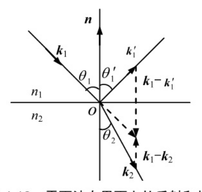


图 1.12　平面波在界面上的反射和折射

式中，$\boldsymbol{r}$ 是界面上的位置矢量，原点可以选在界面上的某一点 O，另外，由于 3 个波的初位相可以不同，所以振幅一般为复数，由边值关系 $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0$，并注意介质 1 中的电场强度是入射波和反射波电场强度的矢量和，得到

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_1')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_2 \tag{1.8-2}$$

把式(1.8-1)代入式(1.8-2)中，有

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{10}\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t)\right]+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{10}'\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1'\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1' t)\right]=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{20}\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t)\right] \tag{1.8-3}$$

式(1.8-3)对任意时间 t 和任意界面位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 都成立，因此要求指数的对应项相等，即

$$\omega_1=\omega_1'=\omega_2 \tag{1.8-4}$$

$$\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}_1'\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r} \tag{1.8-5}$$

式(1.8-4)表明，反射波和折射波的频率与入射波的频率相同，即在反射和折射过程中光波的频率不变。

由式(1.8-5)可得

$$(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_1')\cdot\boldsymbol{r}=0 \tag{1.8-6a}$$

$$(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}=0 \tag{1.8-6b}$$

由于位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 在分界面上是任意的，因此，$(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_1')$ 和 $(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)$ 与界面垂直，即与界面法线平行。由图 1.12 可知，$\boldsymbol{k}_1$ 是 $(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_1')$ 和 $(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)$ 的公共矢量，由于经过同一点只能向平面引一条垂线，所以 $(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}'_1)$ 和 $(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)$ 是重合的，也就是说，$\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_1'$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 共面，它们都在 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{n}$ 构成的入射面内。

1.8.2　反射波与折射波的方向

设入射角、反射角和折射角分别为 θ_1、θ_1' 和 θ_2，在介质 1 和介质 2 中光波的速度分别为 υ_1 和 υ_2，则有

$$k_1=k_1'=\frac{\omega}{\upsilon_1}\ 和\ k_2=\frac{\omega}{\upsilon_2} \tag{1.8-7}$$

当 r 在入射面内时，由式(1.8-6a)可以得到

$$k_1 r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=k_1' r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1'\right) \tag{1.8-8}$$

或

$$\theta_1=\theta_1' \tag{1.8-9}$$

即反射角等于入射角，这就是反射定律。而由式(1.8-6b)可以得到

$$k_1 r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=k_2 r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right) \tag{1.8-10}$$

也可以写成

$$\frac{\sin\theta_1}{\upsilon_1}=\frac{\sin\theta_2}{\upsilon_2} \tag{1.8-11}$$

或

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2 \tag{1.8-12}$$

式中，n_1 和 n_2 分别为介质 1 和介质 2 的折射率。式(1.8-12)就是折射定律，又称为斯涅耳定律(Snell’s law)。由式(1.8-7)还可以得到

$$k_1\upsilon_1=k_2\upsilon_2 \tag{1.8-13}$$

注意到 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ 和 $\upsilon=\dfrac{c}{n}$，还可以得到

$$n_1\lambda_1=n_2\lambda_2 \tag{1.8-14}$$

本节讨论了光在两种不同介质的分界面处发生反射和折射时所满足的基本规律，要点见表 1-8。

表 1–8　入射波、反射波和折射波的关系

波矢及位置关系	频率关系	反射定律	折射定律
$\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}_1'\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}$	$\omega_1=\omega_1'=\omega_2$	$\theta_1=\theta_1'$	$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$



1.9　菲涅耳公式

由于电矢量 $\boldsymbol{E}_1$ 垂直入射面和平行入射面的入射平面波，其反射光和折射光的振幅和位相关系并不相同，所以，必须对这两种情况分别予以讨论。在实际情况中，入射光的电矢量 $\boldsymbol{E}_1$ 可以在垂直于传播方向的平面内取任意方向，但是，总可以把 $\boldsymbol{E}_1$ 分解为垂直于入射面的分量 $\boldsymbol{E}_{1S}$ 和平行于入射面的分量 $\boldsymbol{E}_{1P}$，如图 1.13 所示。也就是说，可以把入射光分解为垂直于入射面和平行于入射面的 S 波和 P 波，然后分别予以讨论。本节将推导 S 波和 P 波的反射系数和透射系数；对菲涅耳公式进行讨论；导出斯托克斯倒逆关系及光入射到介质界面处时的反射率和透射率。

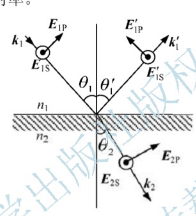


图 1.13　电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的分量 $\boldsymbol{E}_S$ 和 $\boldsymbol{E}_P$

1.9.1　S 波的反射系数与透射系数

当入射平面波是电矢量垂直于入射面的 S 波时，根据光波是横波的性质，可以得到电矢量正向和与其对应的磁矢量的方向，如图 1.14 所示。由 1.7 节的式(1.7-15)和式(1.7-16)可以得到

$$E_{1S}+E'_{1S}=E_{2S} \tag{1.9-1}$$

$$H_{1P}\cos\theta_1-H'_{1P}\cos\theta'_1=H_{2P}\cos\theta_2 \tag{1.9-2}$$

由 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，$E/B=\upsilon$ 和 $c/\upsilon=n$ 得到

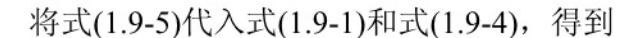
$$H_P=\frac{E_S}{\mu\upsilon}=\frac{nE_S}{\mu c} \tag{1.9-3}$$

因此，式(1.9-2)可以改写为

$$n_1(E_{1S}-E'_{1S})\cos\theta_1=n_2E_{2S}\cos\theta_2 \tag{1.9-4}$$

因为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{1S}=\boldsymbol{E}_{10S}\exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t\right)\right]\\ \boldsymbol{E}'_{1S}=\boldsymbol{E}'_{10S}\exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}'_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega'_1 t\right)\right]\\ \boldsymbol{E}_{2S}=\boldsymbol{E}_{20S}\exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t\right)\right]\end{cases} \tag{1.9-5}$$



将式(1.9-5)代入式(1.9-1)和式(1.9-4)，得到

$$E_{10S} + E'_{10S} = E_{20S} \tag{1.9-6}$$

$$n_1(E_{10S} - E'_{10S})\cos\theta_1 = n_2 E_{20S}\cos\theta_2 \tag{1.9-7}$$

利用折射定律，可以将式(1.9-7)改写为

$$(E_{10S} - E'_{10S})\cos\theta_1 \sin\theta_2 = E_{20S}\cos\theta_2 \sin\theta_1 \tag{1.9-8}$$

利用式(1.9-6)和式(1.9-8)消去 E_{20S} 可以得到反射波和入射波的振幅比为

$$r_S = \frac{E'_{10S}}{E_{10S}} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \tag{1.9-9}$$

利用式(1.9-6)和式(1.9-8)消去 E'_{10S} 可以得到折射波和入射波的振幅比为

$$t_S = \frac{E_{20S}}{E_{10S}} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \tag{1.9-10}$$

r_S和t_S 通常称为 S 波反射系数和透射系数，式(1.9-9)和式(1.9-10)称为 S 波的菲涅耳公式。

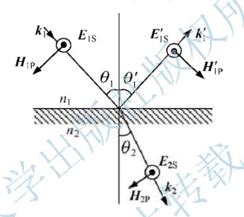


图 1.14　电矢量 S 波对应的磁矢量 P 波

1.9.2　P 波的反射系数与透射系数

当入射平面波是电矢量平行于入射面的 P 波时，根据光波是横波的性质，可以得到电矢量正向和与其对应的磁矢量的方向，如图 1.15 所示。由 1.7 节的式(1.7-16)和式(1.7-15)可以得到

$$H_{1S} + H'_{1S} = H_{2S} \tag{1.9-11}$$

$$E_{1P}\cos\theta_1 - E'_{1P}\cos\theta'_1 = E_{2P}\cos\theta_2 \tag{1.9-12}$$

由 $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$， $E/B = \upsilon$ 和 $c/\upsilon = n$ 得到

$$H_S = \frac{E_P}{\mu\upsilon} = \frac{nE_P}{\mu c} \tag{1.9-13}$$

因此，式(1.9-11)可以改写为

$$n_1(E_{1P} + E'_{1P}) = n_2 E_{2P} \tag{1.9-14}$$

因为



$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{1\mathrm{P}} = \boldsymbol{E}_{10\mathrm{P}} \exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} - \omega_1 t)\right] \\ \boldsymbol{E}_{1\mathrm{P}} = \boldsymbol{E}_{10\mathrm{P}} \exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1' \cdot \boldsymbol{r} - \omega_1' t)\right] \\ \boldsymbol{E}_{2\mathrm{P}} = \boldsymbol{E}_{20\mathrm{P}} \exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} - \omega_2 t)\right] \end{cases} \tag{1.9-15}$$

将式(1.9-15)代入式(1.9-12)和式(1.9-14)，得到

$$(E_{10\mathrm{P}} - E_{10\mathrm{P}}')\cos\theta_1 = E_{20\mathrm{P}}\cos\theta_2 \tag{1.9-16}$$

$$n_1(E_{10\mathrm{P}} + E_{10\mathrm{P}}') = n_2 E_{20\mathrm{P}} \tag{1.9-17}$$

利用折射定律，可以将式(1.9-17)改写为

$$(E_{10\mathrm{P}} + E_{10\mathrm{P}}')\sin\theta_2 = E_{20\mathrm{P}}\sin\theta_1 \tag{1.9-18}$$

利用式(1.9-16)和式(1.9-18)消去 $E_{20\mathrm{p}}$，可以得到反射波和入射波的振幅比为

$$r_\mathrm{P} = \frac{E_{10\mathrm{P}}'}{E_{10\mathrm{P}}} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \tag{1.9-19}$$

利用式(1.9-16)和式(1.9-18)消去 $E_{10\mathrm{p}}'$，可以得到折射波和入射波的振幅比为

$$t_\mathrm{P} = \frac{E_{20\mathrm{P}}}{E_{10\mathrm{P}}} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.9-20}$$

r_P和t_P通常称为 P 波反射系数和透射系数，式(1.9-19)和式(1.9-20)称为 P 波的菲涅耳公式。概括起来，菲涅耳公式可以归纳为

$$r_\mathrm{S} = -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{\cos\theta_1 - n\cos\theta_2}{\cos\theta_1 + n\cos\theta_2} \tag{1.9-21}$$

$$t_\mathrm{S} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{2\cos\theta_1}{\cos\theta_1 + n\cos\theta_2} \tag{1.9-22}$$

$$r_\mathrm{P} = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)} = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \frac{n\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{n\cos\theta_1 + \cos\theta_2} \tag{1.9-23}$$

$$t_\mathrm{P} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \frac{2\cos\theta_1}{n\cos\theta_1 + \cos\theta_2} \tag{1.9-24}$$

显而易见，在正入射或入射角很小时，菲涅耳公式有如下简单形式：

$$r_\mathrm{S} = -\frac{n-1}{n+1}, \quad r_\mathrm{P} = \frac{n-1}{n+1}, \quad t_\mathrm{S} = t_\mathrm{P} = \frac{2}{n+1} \tag{1.9-25}$$

式中，$n = n_2/n_1$ 为相对折射率。

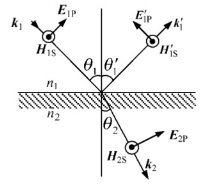


图 1.15　电矢量 P 波对应的磁矢量 S 波

1.9.3 菲涅耳公式的讨论

1. 光从光疏介质射到光密介质

当光从光疏介质射到光密介质时，有 $n_1 < n_2$，根据折射定律，则有 $\theta_1 > \theta_2$。由于 $\theta_1 + \theta_2 \leqslant \pi$，因此，由式(1.9-21)可知，对于 r_S，不管 θ_1 为何值，r_S 总是负的，即 E'_{10S} 和 E_{10S} 总是异号。因此，在界面上 E'_{1S} 和 E_{1S} 应取相反方向，当 E_{1S} 在入射光中取正方向时，E'_{1S} 在反射光中取负方向，反之亦然。这表示对于 S 波，在界面上反射光振动相对于入射光振动总是有 π 的位相突变。因此，原来设定的方向是不正确的。

由式(1.9-22)和式(1.9-24)可知，对于 t_S 和 t_P，不管 θ_1 为何值，t_S 和 t_P 总是正的，即原来设定的方向是正确的。

由式(1.9-23)可知，对于 r_P，当 $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ 时，r_P 为正；$\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$ 时，r_P 为负。前一情况表示在界面上 P 波的 E'_{1P} 和 E_{1P} 在反射光和入射光中同取正方向或负方向，后一情况表示 E'_{1P} 和 E_{1P} 在反射光和入射光中分别取正(负)方向或负(正)方向。当 $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ 时，$r_P = 0$，这时，反射光中电矢量没有平行于入射面的分量。此时的入射角称为起偏振角，又称布儒斯特偏振角(Brewster angle)，记为 θ_B。由折射定律可以得到

$$\tan\theta_B = n_2/n_1 = n \tag{1.9-26}$$


【玻璃片堆】

图 1.16(a)所示为以上 3 种不同入射角情形下在分界面反射和折射时电矢量的取向情况。当自然光以布儒斯特角入射到玻璃片堆时，如果玻璃片足够多，则反射光和透射光都是线偏振光。

由图 1.16(a)可以看出，在入射角很小和入射角接近 90°(掠入射)两种情况下，E'_{1S} 和 E_{1S}、E'_{1P} 和 E_{1P} 的方向都正好相反，因此 E'_1 和 E_1 的方向也正好相反，表明在这两种情况下，反射光振动与入射光振动反相。由此可以得出结论：当接近正入射或掠入射时，反射光振动与入射光振动发生了 π 的位相突变。通常把发生的 π 的位相突变称为半波损失。

2. 光从光密介质射到光疏介质

当光从光密介质射到光疏介质时，有 $n_1 > n_2$，根据折射定律，则有 $\theta_1 < \theta_2$。当入射角 $\theta_1 \geqslant \theta_c$ 时(θ_c 为 $\theta_2 = 90°$ 时所对应的入射角)，将发生全反射。称 θ_c 为发生全反射时的临界角，根据折射定律可以得到

$$\sin\theta_c = n_2/n_1 = n \tag{1.9-27}$$

发生全反射时，光将不进入第二种介质，r_S 和 r_P 变为复数(详见 1.10.1 节)。由于 $\theta_1 + \theta_2 \leqslant \pi$，因此，由式(1.9-21)、式(1.9-22)和式(1.9-24)可知，对于 r_S、t_S 和 t_P，当 $0 < \theta_1 < \theta_c$ 时，r_S、t_S 和 t_P 总是正的；由式(1.9-23)可知，对于 r_P，当 $\theta_1 < \theta_B$ 时其值为负，当 $\theta_1 = \theta_B$ 时其值为零，当 $\theta_B < \theta_1 < \theta_c$ 时其值为正。图 1.16(b)表示了这 3 种入射角情形下在分界面反射和折射时电矢量的取向情况。

光从光疏介质射到光密介质以及光从光密介质射到光疏介质时，S 波和 P 波的反射系数和透射系数变化情况见表 1-9。



$\theta_1+\theta_2<\pi/2$　　$\theta_1+\theta_2=\pi/2$　　$\theta_1+\theta_2>\pi/2$

(a) 光从光疏介质射到光密介质

$\theta_1+\theta_2<\pi/2$　　$\theta_1+\theta_2=\pi/2$　　$\theta_1+\theta_2>\pi/2$

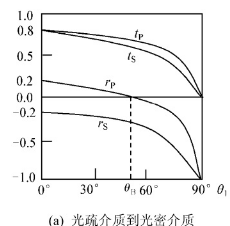
(b) 光从光密介质射到光疏介质

图 1.16　不同入射角情形下在分界面反射和折射时电矢量的取向情况

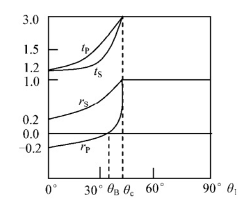
表 1-9　S 波和 P 波的反射系数和透射系数变化情况

条件 / 参数	光疏到光密		光密到光疏	
	$\theta_1<\theta_B$	$\theta_1>\theta_B$	$\theta_1<\theta_B$	$\theta_1>\theta_B$
r_S	−	−	+	+
r_P	+	−	−	+
t_S	+	+	+	+
t_P	+	+	+	+

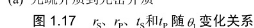
r_S、r_P、t_S和t_P随θ_1变化关系如图 1.17 所示，其中图 1.17(a)表示光从光疏介质(空气，n=1)射到光密介质(玻璃，n=1.5)，而图 1.17(b)则相反。



(a) 光疏介质到光密介质



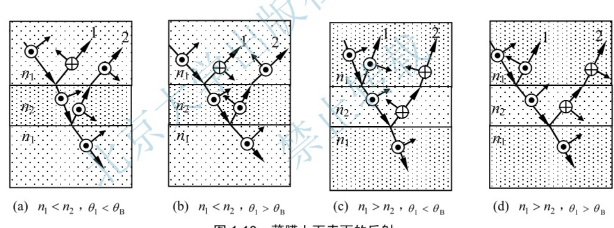
(b) 光密介质到光疏介质


图 1.17　r_S、r_P、t_S和t_P随θ_1变化关系

3. 薄膜上下表面的反射

应当注意的是，无论光从光疏介质到光密介质，还是光从光密介质到光疏介质，只要入射角等于布儒斯特角，则反射光为线偏振光而折射光为部分偏振光。

以上讨论了在一个界面上反射光的突变情况。对于从平面薄膜两表面反射的 1、2 两束光，有如图 1.18 所示的 4 种情形：$n_1 < n_2$，$\theta_1 < \theta_B$ 和 $\theta_1 > \theta_B$；$n_1 > n_2$，$\theta_1 < \theta_B$ 和 $\theta_1 > \theta_B$。



(a) $n_1 < n_2$，$\theta_1 < \theta_B$　(b) $n_1 < n_2$，$\theta_1 > \theta_B$　(c) $n_1 > n_2$，$\theta_1 < \theta_B$　(d) $n_1 > n_2$，$\theta_1 > \theta_B$

图 1.18　薄膜上下表面的反射

由图 1.18 可见，就两束反射光而言，其 S、P 分量的方向总是相反的。因此，薄膜上下两侧介质相同时，上下两表面反射光的光场位相差除了有光程差的贡献外，还有 π 的附加位相差。

如果介质薄膜上下两侧的折射率分别为 n_1 和 n_3，并且有 $n_3 > n_2 > n_1$ 或 $n_3 < n_2 < n_1$，这时两束光的反射性质完全相同，即没有“半波损失”。

1.9.4　斯托克斯倒逆关系

如图 1.19(a)所示，一束光射到一块平行平面介质板上，由 n_1 到 n_2 时的反射系数和透射系数分别为 r 和 t，由 n_2 到 n_1 时的反射系数和透射系数分别为 r' 和 t'。现在来导出它们之间的关系。

如图 1.19(b)所示，设入射光的振幅为 E_0，相应的反射光的振幅为 rE_0，透射光的振幅



为 tE_0；再设一振幅为 rE_0 的光束逆反射光方向传播射向界面，则其相应的反射光的振幅为 rrE_0，透射光的振幅为 trE_0；又一振幅为 tE_0 的光束逆透射光方向传播射向界面，则其相应的反射光的振幅为 $r't\,E_0$，透射光的振幅为 $tt'\,E_0$。因为最初的两束光波——反射光和透射光均被抵消，因此有

$$E_0 - rrE_0 - tt'E_0 = 0 \tag{1.9-28}$$

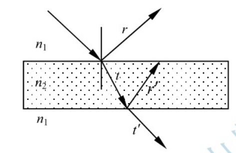
$$rtE_0 + r'tE_0 = 0 \tag{1.9-29}$$

也就是

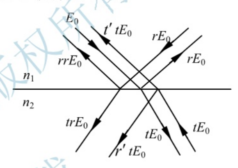
$$tt' + r^2 = 1 \tag{1.9-30}$$

$$r' = -r \tag{1.9-31}$$

式(1.9-30)和式(1.9-31)称为斯托克斯倒逆关系(Stokes reversible relation)。在讨论多光束干涉(详见 4.7 节)和多层介质膜(详见 4.9 节)时将用到它们。注意式(1.9-30)和式(1.9-31)省略了下脚标 S 和 P，也就是说，斯托克斯倒逆关系对 S 波和 P 波都成立。



(a) 反射系数和透射系数的情况



(b) 入射光、反射光和透射光的振幅情况

图 1.19　推导斯托克斯倒逆关系用图

1.9.5　反射率与透射率

菲涅耳公式给出了入射光波、反射光波和折射光波之间的振幅和位相关系，下面再来讨论入射光波、反射光波和折射光波之间的能量关系。因为辐射强度 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$，并且有 $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$，$E / B = \upsilon$，所以标量形式辐射强度为

$$S = \upsilon \varepsilon E^2 \tag{1.9-32}$$

对于标量形式平面电磁波

$$E = E_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

代入式(1.9-32)，可以得到

$$S = \upsilon \varepsilon E_0^2 \cos^2(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \tag{1.9-33}$$

在物理光学中，通常把辐射强度的平均值称为光强，并用 I 表示，即

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T S\mathrm{d}t = \upsilon \varepsilon E_0^2 \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kr - \omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\upsilon \varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}nE_0^2 \tag{1.9-34}$$

式(1.9-34)表示单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的能量。由此可见，光强与介质的折射率和电磁场的振幅的平方成正比，如果在同一介质中研究光强的分布，人们习惯上用振幅的平方度量光强，即以相对光强表示光强的分布和变化。如果在不同介质中讨论光强的分布和变化，一定不要忘记折射率因子。

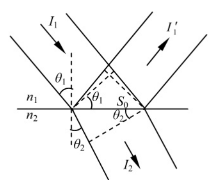


图 1.20　入射、反射和折射光光能分配

反射和折射时光束截面的变化如图 1.20 所示。如果入射光束投射到界面上的面积为 S_0，则入射和反射正截面的面积为 $S_0\cos\theta_1$，折射光正截面的面积为 $S_0\cos\theta_2$。不考虑吸收和散射等损耗，则入射光波能量在反射光波和折射光波中重新分配。如果把入射波、反射波和折射波的能量分别记为 W_1、W_1' 和 W_2，则每秒入射到分界面的能量为

$$W_1 = I_1 S_0 \cos\theta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{10}^2 S_0\cos\theta_1 \tag{1.9-35}$$

而反射波和折射波每秒从分界面单位面积带走的能量为

$$W_1' = I_1' S_0 \cos\theta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{10}'^2 S_0\cos\theta_1 \tag{1.9-36}$$

$$W_2 = I_2 S_0 \cos\theta_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_{20}^2 S_0\cos\theta_2 \tag{1.9-37}$$

因此，在分界面上反射波、折射波的能量流与入射波的能量流之比为

$$R = \frac{E_{10}'^2}{E_{10}^2} \tag{1.9-38}$$

$$T = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\frac{E_{20}^2}{E_{10}^2} \tag{1.9-39}$$

R 和 T 分别称为反射率和透射率，根据能量守恒，应有

$$R + T = 1 \tag{1.9-40}$$

将菲涅耳公式代入式(1.9-38)和式(1.9-39)，可以得到 S 波和 P 波的反射率和透射率为

$$R_S = \frac{E_{10S}'^2}{E_{10S}^2} = \frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} = r_S^2 \tag{1.9-41}$$

$$T_S = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\frac{E_{20S}^2}{E_{10S}^2} = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\ \frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\cdot t_S^2 \tag{1.9-42}$$

$$R_P = \frac{E_{10P}'^2}{E_{10P}^2} = \frac{\tan^2(\theta_1-\theta_2)}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)} = r_P^2 \tag{1.9-43}$$

$$T_P = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\frac{E_{20P}^2}{E_{10P}^2} = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\ \frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)} = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\cdot t_P^2 \tag{1.9-44}$$

根据能量守恒，当光波只有 S 波或 P 波分量时，同样应有

$$R_S + T_S = 1 \quad 和 \quad R_P + T_P = 1 \tag{1.9-45}$$

通常遇到的是入射光为自然光的情形，这时也可以把自然光分成 S 波和 P 波，并且它们的能量相等，都等于自然光能量的一半，即

$$W_{1S} = W_{1P} = \frac{1}{2}W_1 \tag{1.9-46}$$



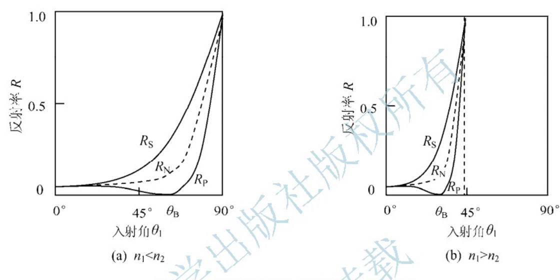
因此，自然光的反射率为

$$R_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{P}}) \tag{1.9-47}$$

将式(1.9-41)和式(1.9-43)代入式(1.9-47)，得到自然光反射率随入射角变化的关系为

$$R_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} + \frac{\tan^2(\theta_1-\theta_2)}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)}\right] \tag{1.9-48}$$

图 1.21(a)和图 1.21(b)分别是光从空气到玻璃(n=1.52)在玻璃界面反射和从玻璃到空气在空气界面反射时，R_{S}、R_{P} 和 R_{N} 随入射角 θ_1 变化的关系曲线。



(a) $n_1<n_2$　　(b) $n_1>n_2$

图 1.21　反射率 R 随入射角 θ_1 的变化关系

正入射时，自然光的反射率为

$$R_{\mathrm{N}} = R_{\mathrm{S}} = R_{\mathrm{P}} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \tag{1.9-49}$$

当 $n=1.52$ 时，$R_{\mathrm{N}}=0.043$，即约有 4%的光能量在界面上反射。相应地，正入射时，自然光的透射率约为 96%。应当注意的是，当 $\theta_1<\theta_{\mathrm{B}}$ 时，R 很小且缓慢变化，当 $\theta_1>\theta_{\mathrm{B}}$ 时，R 随着入射角 θ_1 的增加急剧上升。还应当注意的是，由式(1.9-49)可以知道，正入射时，反射率会随着 n 的增加而增加，如 $n=2$ 时，$R_{\mathrm{N}}=0.11$；$n=3$ 时，$R_{\mathrm{N}}=0.25$；$n=4$ 时，$R_{\mathrm{N}}=0.36$。

本节对菲涅耳公式进行了推导和讨论，导出了斯托克斯倒逆关系，并讨论了光入射到介质界面处时的反射率和透射率，要点见表 1-10。

表 1-10　菲涅耳公式、斯托克斯倒逆关系、反射率和透射率

菲涅耳公式	斯托克斯倒逆关系	反射率和透射率
$r_{\mathrm{S}} = -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$；$t_{\mathrm{S}} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$	$tt' + r^2 = 1$	$R_{\mathrm{S}} = r_{\mathrm{S}}^2$；$T_{\mathrm{S}} = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\cdot t_{\mathrm{S}}^2$
$r_{\mathrm{P}} = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}$；$t_{\mathrm{P}} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}$	$r' = -r$	$R_{\mathrm{P}} = r_{\mathrm{P}}^2$；$T_{\mathrm{P}} = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\cdot t_{\mathrm{P}}^2$

1.10 全 反 射

当光波从光密介质射向光疏介质，即 $n_1 > n_2$ 时，根据折射定律，则有 $\theta_1 < \theta_2$，即折射角大于入射角。如果 θ_1 等于某一角 θ_c，恰使 $\theta_2 = 90°$，这就意味着入射光全部返回介质 1 中，没有折射波，这种现象称为全反射。此时，折射定律表示为 $\sin\theta_c = n_2/n_1 = n$，$\theta_c$ 称为全反射临界角。本节将讨论全反射时的反射系数和位相变化以及倏逝波。

1.10.1 反射系数变化

如果 $\theta_1 > \theta_c$，由折射定律可知，$\sin\theta_2 > 1$，不可能求出任何实数的折射角。如果认为折射定律在入射角大于临界角时仍然成立，则应有

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = \frac{\sin\theta_1}{n} \tag{1.10-1}$$

$$\cos\theta_2 = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n^2} - 1} \tag{1.10-2}$$

在以后的讨论中将会发现，式(1.10-2)中只能取正号。将式(1.10-1)和式(1.10-2)代入 r_S 和 r_P 的表达式中，分别得到 S 波的反射系数为

$$r_S = \frac{\cos\theta_1 - \mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}{\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}} \tag{1.10-3}$$

而 P 波的反射系数为

$$r_P = \frac{n^2\cos\theta_1 - \mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}{n^2\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}} \tag{1.10-4}$$

r_S 和 r_P 均为复数，因此，可以写成

$$r_S = |r_S|\exp(\mathrm{i}\delta_S) \tag{1.10-5}$$

$$r_P = |r_P|\exp(\mathrm{i}\delta_P) \tag{1.10-6}$$

在式(1.10-5)和式(1.10-6)中，复数的模表示反射光和入射光的实振幅之比，而复数的幅角表示反射时的位相变化。由于在式(1.10-3)和式(1.10-4)中分子和分母是一对共轭复数，所以，$|r_S| = |r_P| = 1$，相应地，反射率也等于 1，表明全反射时所有光能全部返回介质 1 中，不存在折射光。

1.10.2 位相变化

由式(1.10-3)和式(1.10-5)，可以求得

$$\tan\left(\frac{\delta_S}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}{\cos\theta_1} \tag{1.10-7}$$

由式(1.10-4)和式(1.10-6)，可以求得



$$\tan\left(\frac{\delta_P}{2}\right)=-\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{n^2\cos\theta_1} \tag{1.10-8}$$

δ_S 和 δ_P 随 θ_1 变化的关系曲线如图 1.22 所示。可见，在全反射的情况下，S 波和 P 波在界面上有不同的位相跃变。因此，反射光中 S 波和 P 波有位相差 δ，它由下式决定：

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right)=\tan\left(\frac{\delta_S-\delta_P}{2}\right)=\frac{\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1} \tag{1.10-9}$$

可见，当入射角等于临界角时，反射光中 S 波和 P 波的位相差为零，如果这时入射光为线偏振光，则反射光也为线偏振光。但当入射角大于临界角，且入射线偏振光的振动与入射面的交角又非 0° 或 90°，这时由于反射光中 S 波和 P 波有位相差($\delta\neq 0$ 或 π)，反射光将变成椭圆偏振光。关于两个正交线偏振光的叠加详见 6.2 节。

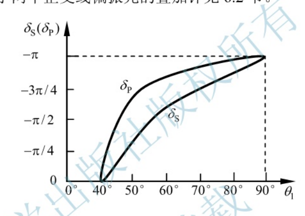


图 1.22　δ_S 和 δ_P 随 θ_1 变化的关系曲线

当入射角等于临界角或 90° 时，式(1.10-9)等于零，所以在两值之间，相对位相差 δ 有一个极大值，可以通过对式(1.10-9)求导得到

$$\frac{d}{d\theta_1}\left[\tan\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]=\frac{2n^2-(1+n^2)\sin^2\theta_1}{\sin^3\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}=0 \tag{1.10-10}$$

由式(1.10-10)可以解得

$$\sin^2\theta_1=\frac{2n^2}{1+n^2} \tag{1.10-11}$$

将式(1.10-11)代入式(1.10-9)，得到相对位相差的极大值为

$$\tan\left(\frac{\delta_{max}}{2}\right)=\frac{1-n^2}{2n} \tag{1.10-12}$$

从式(1.10-9)可以看出，当 n 给定时，每一个 δ 相应有两个入射角。全反射时发生的相变，可以用来把线偏振光变成圆偏振光。令入射光的偏振方向与入射面法线成 45°，以使它的两个振幅分量相等。于是由式(1.10-5)和式(1.10-6)得到 $|r_S|=|r_P|$，此外，再选择 n 和 θ_1，使相对位相差 δ 等于 90°。要单次反射获得 90° 的 δ，按照式(1.10-12)，就需要

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-n^2}{2n} \tag{1.10-13}$$

由此可以得到 $n=0.414$，也就是说，光密介质对光疏介质相对折射率不得小于 2.41。因此，单次反射获得 90° 的 δ 需要较大折射率的介质。菲涅耳当时利用了两次玻璃上的全反射进行了实验。按照式(1.10-11)和式(1.10-12)，当 $n_1=1.51$，$n_2=1$ 时，最大相对位相差 $\delta_{\mathrm{M}}=45°56'$，这时入射角等于 $51°20'$。因此，用 $\theta_1=48°37'$ 或 $\theta_1=54°37'$ 都正好能够得到 $\delta=45°$，所以如果在其中某一角度下接连全反射两次，则可以获得 90° 的位相差。图 1.23 所示的玻璃块即用于此，称为菲涅耳菱体。

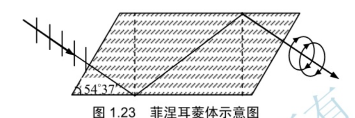


图 1.23　菲涅耳菱体示意图

菲涅耳菱体也可以用来产生椭圆偏振光，这时要让入射线偏振光的振动方向与入射面法线不成 45°；当然，用菲涅耳菱体也可以把椭圆偏振光变成线偏振光。

1.10.3　倏逝波

电场和磁场不可能中断在两种介质的分界面上，它应当满足电磁场的边界条件，因而在第二种介质中一定会存在透射波，实验表明，该透射波急骤衰减，因此称为倏逝波。如图 1.24 所示，若选取入射面为 xOz 平面，则透射波可以表示为

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{20}\exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t\right)\right] \tag{1.10-14}$$

上式又可以写成

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{20}\exp\left[\mathrm{i}\left(k_{2x}x+k_{2z}z-\omega t\right)\right] \tag{1.10-15}$$

由式(1.10-1)和式(1.10-2)，可以得到

$$k_{2z}=k_2\sin\theta_2=k_2\frac{\sin\theta_1}{n} \tag{1.10-16}$$

$$k_{2x}=k_2\cos\theta_2=\pm\mathrm{i}k_2\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n^2}-1}=\pm\mathrm{i}\kappa \tag{1.10-17}$$

这样，透射波的波函数可以写成

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{20}\exp(\mp\kappa x)\left[\mathrm{i}\left(k_{2z}z-\omega t\right)\right] \tag{1.10-18}$$

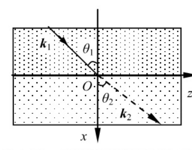


图 1.24　全反射时的透射波示意图

式(1.10-18)表明，透射波是一个沿 z 方向传播的，振幅在 x 方向按指数规律变化的波，这个波就是倏逝波。如图 1.25 所示，容易看到，倏逝波的等幅面是 x 为常数的平面，等相面是 z 为常数的平面，两者相互垂直。应当注意的是，一般平面波的等幅面和等相面是重合的，这种平面波又称均匀平面波。倏逝波的等幅面和等相面是相互垂直的，通常称等幅面和等相面不重合的波为非均匀平面波(inhomogeneous wave)。



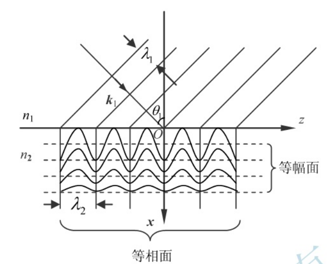


图 1.25　全反射时透入第二介质中的倏逝波示意图

倏逝波的振幅因子为 $\boldsymbol{E}_{20}\exp(\mp\kappa x)$。显然，$\kappa$ 前只能取负号，取正号时振幅因子表示离开界面向第二介质深入时振幅值随着距离增大而增大，这在物理上是不可能的，在式(1.10-2)中只取正号的原因即在于此。倏逝波的振幅随 x 的增加急骤衰减。通常定义振幅减小到界面（$x=0$）振幅 $1/e$ 的深度为穿透深度 x_0：

$$x_0=\frac{1}{\kappa}=\frac{n}{k_2\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}=\frac{1}{k_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}=\frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}} \tag{1.10-19}$$

取 $n_1=1.5$，$n_2=1$，当 $\theta_1=45°$、$60°$ 和 $90°$ 时，x_0 分别为 0.676λ、0.288λ 和 0.214λ。可见，倏逝波的穿透深度为波长量级。

倏逝波的波长为

$$\lambda_2=2\pi/k_{2z}=\frac{2\pi}{k_2\sin\theta_2}=\frac{2\pi n_2}{k_2\ n_1\ \sin\theta_1}=\frac{2\pi n_2}{k_1\ n_2\ \sin\theta_1}=\lambda_1/\sin\theta_1 \tag{1.10-20}$$

倏逝波的速度为

$$\upsilon_2=\omega/k_{2z}=\frac{k_2\upsilon_2}{k_2\sin\theta_2}=\upsilon_1/\sin\theta_1 \tag{1.10-21}$$

应当指出，虽然在第二介质中存在倏逝波，但它并不向第二介质内部传输能量。

本节讨论了全反射时的反射系数和位相变化及其在偏振光转换中的应用，并讨论了倏逝波，要点见表 1-11。

表 1-11　全反射和倏逝波

全反射临界角	位 相 变 化	倏 逝 波	穿 透 深 度
$\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}=n$	$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right)=\frac{\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1}$	$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{20}\exp(-\kappa x)\left[\mathrm{i}(k_{2z}z-\omega t)\right]$	$x_0=\frac{n}{k_2\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}$

1.11　光在金属表面的透射与反射

前面几节所讨论的都是不导电、各向同性介质中光的传播。现在来讨论一下导电介质的光学性质。普通金属块是一种晶粒聚集体，由无规取向的小晶体构成，这种取向无规的微晶组成的混合物，其物性表现如同各向同性物质。与绝缘介质相比，金属具有良好的导电性能，即金属的电导率很大，容易在金属内形成电流，这一电流的存在将使入射波产生强烈的反射，并使透入金属内的波迅速地耗散为电流的焦耳热。这是一个不可逆现象，其中电磁能被消耗，或者更确切地说，被转变成热能，因而电磁波在导体中发生衰减，这一衰减效应非常强，所以通常光波只能透入金属表面很薄的一层内，以致金属实际上是不透明的。

依靠引进一个复介电常数(或一个复折射率)来代替原有的实介电常数(或实折射率)，就可以把电导率的存在所产生的影响完全考虑进来。在金属中，复介电常数的虚部是起主导作用的。本节将讨论金属内的透射波以及光在金属表面的反射率。

1.11.1　金属内的透射波

在频率不是特别高($\omega \ll 10^{17}\,\mathrm{Hz}$)的电磁场作用下，金属中的自由电子只分布于金属表面上，金属内部电荷体密度 $\rho = 0$，并且自由电子在表面层形成表层电流，其电流密度 $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$。所以，对于金属，麦克斯韦方程组表示为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.11-1}$$

取方程组第三式的旋度，得到

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{H}) \tag{1.11-2}$$

或者

$$\nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E} \right) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1.11-3}$$

利用方程组第一式，可得

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.11-4}$$

上式便是金属中电磁场的波动方程，可见，金属中的波动方程与介质中的波动方程只差一项，可以认为平面波的解是式(1.11-4)的近似解。将 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t \right) \right]$ 代入式(1.11-4)，则可以得到



$$-k^2 + \mathrm{i}\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu = 0 \tag{1.11-5}$$

式(1.11-5)表明，在金属中传播的平面波的波矢量为复数。可以把它写成

$$\tilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha} \tag{1.11-6}$$

这样，金属中的平面波为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\right] \tag{1.11-7}$$

可见，它是一个衰减的波，随着波透入金属内距离的增大，波的振幅按指数衰减。透射波振幅的衰减由波矢量的虚部描述，而传播的位相关系由波矢量的实部描述。将式(1.11-6)代入式(1.11-5)可以得到

$$-\left(\beta^2 + 2\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} - \alpha^2\right) + \mathrm{i}\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu = 0 \tag{1.11-8}$$

分别对实部和虚部写出等式，得到

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\varepsilon\mu \tag{1.11-9}$$

$$2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \omega\mu\sigma \tag{1.11-10}$$

为简单起见，考察平面波沿垂直于金属表面的方向传播的情形。设金属表面为 xy 平面，z 轴指向金属内部，式(1.11-7)变成

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(-\alpha z)\exp\left[\mathrm{i}(\beta z - \omega t)\right] \tag{1.11-11}$$

由式(1.11-9)和式(1.11-10)可以解得

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} - 1\right)\right]^{1/2} \tag{1.11-12}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} + 1\right)\right]^{1/2} \tag{1.11-13}$$

对于金属良导体 $\sigma/\varepsilon\omega \gg 1$，可以得到

$$\alpha \approx \beta \approx \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)^{1/2} \tag{1.11-14}$$

穿透深度为

$$z_0 = \frac{1}{\alpha} \approx \left(\frac{2}{\omega\mu\sigma}\right)^{1/2} \tag{1.11-15}$$

因为穿透深度很小，所以通常情况下金属是不透明的。

1.11.2　金属表面的反射

注意金属的麦克斯韦方程组式(1.11-1)和绝缘介质的麦克斯韦方程组差别仅在于第四式中多了一项 $\sigma\boldsymbol{E}$，这一项是由金属中表层电流引起的。如果入射到金属表面的平面波为 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\right]$，则可以得到

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} + \sigma\boldsymbol{E} \tag{1.11-16}$$

如果引入金属的复介电常数

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega} \tag{1.11-17}$$

式(1.11-16)就可以写为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E} \tag{1.11-18}$$

上式与绝缘介质中的麦克斯韦方程组在形式上完全相同，因此，平面波通过两种介质界面传播的边值关系，以及根据边值关系得到的关于反射和折射的公式，对于金属界面的情况也都仍然适用。对于光波垂直入射到金属界面的情形，反射率应为

$$R = \left|r^2\right| = \left|\frac{\tilde{n}-1}{\tilde{n}+1}\right|^2 \tag{1.11-19}$$

式中，$\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}/\varepsilon_0}$，称为金属的复折射率。若令

$$\tilde{n} = n + \mathrm{i}\kappa \tag{1.11-20}$$

则式(1.11-19)可以表示为

$$R = \frac{n^2 + \kappa^2 + 1 - 2n}{n^2 + \kappa^2 + 1 + 2n} \tag{1.11-21}$$

表 1-12 所列为一些金属对于钠黄光($\lambda = 539.8\mathrm{nm}$)的折射率和反射率。

表 1-12　金属的光学常数($\lambda = 539.8\mathrm{nm}$)

金　属	n	κ	R	金　属	n	κ	R
钠	0.044	2.42	0.97	金(电解的)	0.47	2.83	0.82
银	0.20	3.44	0.94	铜	0.62	2.57	0.73
镁	0.37	4.42	0.93	镍(电解的)	1.58	3.42	0.66
铝	1.44	5.23	0.83	铂(电解的)	2.63	3.54	0.59
锡	1.48	5.25	0.83	铁(蒸发的)	1.51	1.63	0.33

在斜入射的情况下，同样可以利用介质的反射系数公式，即

$$r_{\mathrm{S}} = \frac{E'_{10\mathrm{S}}}{E_{10\mathrm{S}}} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$r_{\mathrm{P}} = \frac{E'_{10\mathrm{P}}}{E_{10\mathrm{P}}} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

对反射率进行计算，应当注意的是，对于金属有

$$\tilde{n}\sin\theta_2 = \sin\theta_1 \tag{1.11-22}$$

因为 $\tilde{n}$ 是复数，所以 $\sin\theta_2$ 也是复数，所以 θ_2 不再具有通常所理解的折射角的意义。将式(1.11-22)代入菲涅耳公式中，得到 S 波和 P 波的反射率为

$$R_{\mathrm{S}} = \frac{(n - \cos\theta_1)^2 + \kappa^2}{(n + \cos\theta_1)^2 + \kappa^2} \tag{1.11-23}$$



$$R_P = \frac{\left(n - \dfrac{1}{\cos\theta_1}\right)^2 + \kappa^2}{\left(n + \dfrac{1}{\cos\theta_1}\right)^2 + \kappa^2} \tag{1.11-24}$$

图 1.26 所示为银和铜两种金属的反射率随入射角 θ_1 变化的曲线(入射光的波长为 450nm)，它与介质的反射率曲线相比较，有两点类似：一是在 $\theta_1 = 90°$ 时都趋于 1；二是 R_P 有一个极小值，但是金属的 R_P 的极小值不等于零。

另外，在金属中，r_S和r_P 也都是复数，这表明反射光相对于入射光，S 波和 P 波都发生了位相跃变。随着入射角的不同，位相跃变的绝对值介于 0 和 π 之间，并且，一般地，S 波和 P 波的位相跃变不同，因此，若入射光为线偏振光，在金属表面反射的光一般将变为椭圆偏振光。

还有一点应当注意，对于同一种金属，入射光波长不同，反射率也不同。图 1.27 所示为在垂直入射时几种金属的反射率随波长变化的曲线。金属反射的这一性质，是由于金属的复介电常数和复折射率与频率有关所致，也就是电导率和实介电常数与频率有关引起的。

电导率是来源于自由电子的贡献，而实介电常数则是束缚电子的贡献。对于频率较低的光波，它主要对金属中的自由电子发生作用。自由电子将在光波电场的作用下强迫振动，产生次波，这些次波构成了很强的反射波和较弱的透射波，因此，导致金属对低频光波有较高的反射率。频率较高的光波(紫外光)也可以对金属中的束缚电子发生作用，这种作用将使金属反射能力降低，透射能力增大，呈现出非金属的光学性质。如图 1.27 所示，银对于红光和红外光反射率在 0.9 以上，而在紫外区，反射率很低，在 $\lambda = 316$nm 附近，反射率降到 0.04，相当于玻璃的反射率，这时透射明显增大。铝的反射率随波长的变化比较平稳，对于紫外光仍有相当高的反射率，因此，铝经常被用作反射镜的金属镀层。应当注意的是铝膜容易氧化，因此，通常情况下都要在铝膜上加镀一层保护膜。

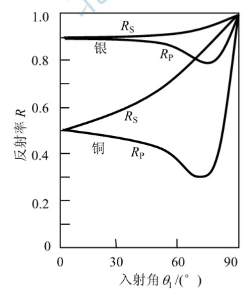


图 1.26　银和铜的反射率随入射角 θ_1 变化的曲线

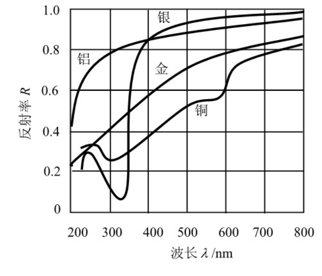


图 1.27　几种金属的反射率随波长变化的曲线

本节讨论了金属内的透射波以及光在金属表面的反射率，要点见表 1-13。

表 1-13　光在金属表面的透射和反射

金属中的平面波	穿透深度	金属表面的反射率
$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right]$	$z_0\approx\left(\dfrac{2}{\omega\mu\sigma}\right)^{1/2}$	$R=\dfrac{n^2+\kappa^2+1-2n}{n^2+\kappa^2+1+2n}$

小　　结

本章以微分形式麦克斯韦方程组为理论基础，推导了电磁波在各向同性介质中传播时的波动方程，通过在直角坐标系、球坐标系和柱坐标系下解波动方程得到平面波、球面波和柱面波的具体表达形式。在此基础上讨论光波叠加所形成的光驻波和复色波以及与它们相关的波腹、波节、光学拍和群速度、相速度等相关概念。

本章以积分形式的麦克斯韦方程组为理论基础，推导了电磁波传播到介质交界面处所满足的边值关系，利用边值关系推导了光在介质表面的反射和折射规律，以及反射光和折射光与入射光之间的频率关系、波矢关系、振幅关系、能量关系，并进行了相关的讨论，得到菲涅耳公式、斯托克斯倒逆关系、反射率和透射率。

本章还讨论了反射光产生偏振和全反射的条件，给出了布儒斯特角和全反射的临界角，并介绍了相关的应用，最后，对光在金属表面的反射率和透射波进行了讨论。

应 用 实 例

应用实例 1-1　如果光波一个线偏振光在溶液中传播时可以表示为 $E_y=0$， $E_z=0$， $E_x=10\cos\left[10^{15}\pi\left(\dfrac{z}{0.8c}-t\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]$，求光波在该溶液中传播时的振幅、频率、波长、速度和该溶液的折射率。

解：根据光波的实数表达式 $E=E_0\cos(kz-\omega t+\delta)$，得到光波的振幅为

$$E_0=10\mathrm{V/m}$$

光的频率为

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{10^{15}\pi}{2\pi}=5\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$$

光的波长为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi\times0.8\times3\times10^8}{10^{15}\pi}\mathrm{m}=0.48\mu\mathrm{m}$$

光波在溶液中的速度为

$$\upsilon=\frac{\omega}{k}=\frac{10^{15}\pi\times0.8\times3\times10^8}{10^{15}\pi}\mathrm{m/s}=2.4\times10^8\,\mathrm{m/s}$$

溶液的折射率为



$$n=\frac{c}{\upsilon}=\frac{3\times10^8}{2.4\times10^8}=1.25$$

应用实例 1-2　如果两个光波的光振动分别表示为 $E_1=3\cos\pi t$ 和 $E_2=4\cos(\pi t+\pi/3)$，试利用代数加法和复数加法求合振动表达式。

解：(1) 代数加法。根据式(1.3-41)，有

$$E^2=E_{10}^2+E_{20}^2+2E_{10}E_{20}\cos(\alpha_2-\alpha_1)=3^2+4^2+2\times3\times4\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=37$$

因此，合振动的振幅为

$$E=\sqrt{37}\mathrm{V/m}$$

根据式(1.3-42)，有

$$\tan\alpha=\frac{E_{10}\sin\alpha_1+E_{20}\sin\alpha_2}{E_{10}\cos\alpha_1+E_{20}\cos\alpha_2}=\frac{3\sin0^\circ+4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3\cos0^\circ+4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

因此，合振动的初位相为

$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$$

因此，合振动表达式为

$$E=\sqrt{37}\cos\left[\pi t+\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)\right]$$

(2) 复数加法。因为两个光波的光振动可以用复数分别表示为 $E_1=3\exp(\mathrm{i}\pi t)$ 和 $E_2=4\exp(\mathrm{i}\pi t)\cdot\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{3}\right)$，因此，有

$$E=\exp(\mathrm{i}\pi t)\left[3+4\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{3}\right)\right]=\exp(\mathrm{i}\pi t)\left[3+4(\cos60^\circ+\mathrm{i}\sin60^\circ)\right]$$

$$=\exp(\mathrm{i}\pi t)(5+\mathrm{i}2\sqrt{3})=\sqrt{37}\exp\left[\mathrm{i}\left(\pi t+\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)\right)\right]$$

应用实例 1-3　一束 S 波以 60° 角从空气入射到某介质上，反射率为 0.20，求：(1) 介质的折射率；(2) S 波的透射系数是多少？

解：(1) 利用式(1.9-41)，并注意到光从光疏介质到光密介质时反射系数为负，可以得到 S 波的反射系数为

$$r_\mathrm{S}=-\sqrt{R_\mathrm{S}}=-\sqrt{0.2}\approx-0.45$$

利用式(1.8-12)，可以得到

$$n_2\sin\theta_2=n_1\sin\theta_1$$

利用式(1.9-21)，可以得到

$$n_2\cos\theta_2=\frac{1-r_\mathrm{S}}{1+r_\mathrm{S}}n_1\cos\theta_1$$

上两式相除得到

$$\tan\theta_2 = \frac{1+r_S}{1-r_S}\tan\theta_1 = \frac{1-0.45}{1+0.45}\tan 60^\circ \approx 0.66$$

因此得到 $\theta_2 = 33.3^\circ$；再利用式(1.8-12)，得到介质的折射率为

$$n_2 = \frac{n_1 \sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{1\times\sin 60^\circ}{\sin 33.3^\circ} \approx 1.58$$

(2) 利用式(1.9-22)，可以得到 S 波的透射系数为

$$t_S = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{2\times 1\times\cos 60^\circ}{1\times\cos 60^\circ + 1.58\times\cos 33.3^\circ} = 0.549$$

应用实例 1-4 一束光波入射玻璃-空气界面，若玻璃的折射率为 1.52，求：(1) 布儒斯特角；(2) 全反射临界角；(3) 该光波入射空气-玻璃界面时布儒斯特角是多少？

解：(1) 根据式(1.9-26)，布儒斯特角为

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1.52} \Rightarrow \theta_B = 33.34^\circ$$

(2) 根据式(1.9-27)，全反射临界角为

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1.52} \Rightarrow \theta_c = 41.14^\circ$$

(3) 根据式(1.9-26)，布儒斯特角为

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} = 1.52 \Rightarrow \theta_B = 56.66^\circ$$

应用实例 1-5 一束光波以 54.62° 入射玻璃-空气界面，若玻璃的折射率为 1.52，求全反射光中 S 波和 P 波的相移，以及 S 波和 P 波的位相差。

解：根据式(1.10-7)，S 波的相移为

$$\tan\left(\frac{\delta_S}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}{\cos\theta_1} = -\frac{\sqrt{\sin^2 54.62^\circ - (1/1.52)^2}}{\cos 54.62^\circ} \Rightarrow \delta_S \approx -80.08^\circ$$

根据式(1.10-8)，P 波的相移为

$$\tan\left(\frac{\delta_P}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}{n^2\cos\theta_1} = -\frac{1.52^2\times\sqrt{\sin^2 54.62^\circ - (1/1.52)^2}}{\cos 54.62^\circ} \Rightarrow \delta_P \approx -125.08^\circ$$

根据式(1.10-9)，S 波和 P 波的位相差为

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\delta_S - \delta_P}{2}\right) = \frac{\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}{\sin^2\theta_1} = \frac{\cos 54.62^\circ\sqrt{\sin^2 54.62^\circ - (1/1.52)^2}}{\sin^2 54.62^\circ} \Rightarrow \delta = 45^\circ$$

由此可见，S 波和 P 波合成为左旋椭圆偏振光。



习　　题

1.1　某一平面电磁波电矢量表示 $E=(-2x+2\sqrt{3}y)\exp\left[\mathrm{i}(\sqrt{3}x+y+6\times10^{8}t)\right]$，计算该平面电磁波的振动方向、传播方向、振幅、波数、相速度、频率和波长。

1.2　一束光在玻璃中传播时表示为 $E_y=0$，$E_z=0$，$E_x=10\cos\left[\pi\times10^{15}(z/0.65c-t)\right]$，试求该光波的振幅、频率、波长以及玻璃的折射率。

1.3　一个平面电磁波可以表示为 $E_x=0$，$E_z=0$，$E_y=\cos\left[2\pi\times10^{14}(z/c-t)+\dfrac{\pi}{3}\right]$。试求：(1) 该光波的振幅、频率、波长和初位相；(2) 波的传播方向和电矢量的振动方向；(3) 与电场相联系的磁场 $\boldsymbol{B}$。

1.4　一平面简谐电磁波在真空中沿 z 方向传播，其电矢量的振动面在 xOz 平面内。电磁波的频率为 $\nu=10^6\mathrm{Hz}$，振幅 $E_0=0.08\,\mathrm{V/m}$。试求：(1)该电磁波的周期和波长；(2) $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的表示式；(3) 电磁波的强度。

1.5　真空中传播的某磁场表示为 $B_x=0$，$B_z=0$，$B_y=10^{-3}\cos\left[4\pi\times10^{8}(z-3\times10^{8}t)\right]$，试写出与其对应的电场的表示式。

1.6　在维纳光驻波实验中，涂有感光乳胶膜的玻璃片的长度为 1cm。玻璃片一端与反射镜接触，另一端与反射镜相距 $10\,\mu\mathrm{m}$。实验中测量出乳胶上两个黑纹的距离为 $250\,\mu\mathrm{m}$，问所用光波的波长是多少？

1.7　一束线偏振光在 45° 角下入射到空气-玻璃界面，线偏振光的电矢量垂直于入射面。假设玻璃的折射率 n=1.52，试求反射系数和透射系数。

1.8　光波在折射率分别为 n_1 和 n_2 的界面上反射和折射，设由 n_1 进入 n_2 时入射角为 θ_1，折射角为 θ_2，S 波和 P 波的反射系数分别为 r_S 和 r_P，透射系数分别为 t_S 和 t_P。由 n_2 进入 n_1 时入射角为 θ_2，折射角为 θ_1，S 波和 P 波的反射系数分别为 r'_S 和 r'_P，透射系数分别为 t'_S 和 t'_P。试利用菲涅耳公式证明：(1) $r_\mathrm{S}=-r'_\mathrm{S}$；(2) $r_\mathrm{P}=-r'_\mathrm{P}$；(3) $t_\mathrm{S}t'_\mathrm{S}+r_\mathrm{S}^2=1$；(4) $t_\mathrm{P}t'_\mathrm{P}+r_\mathrm{P}^2=1$。

1.9　电矢量振动方向与入射面成 45° 角的一束线偏振光入射到两介质的界面上，若入射角 θ_1=30°，两介质的折射率分别为 n_1=1 和 n_2=1.5，问反射光中电矢量与入射面所成的角度是多少？若 θ_1=60°，反射光电矢量与入射面所成的角度又是多少？

1.10　光束垂直入射到玻璃-空气界面，玻璃折射率 n=1.50，试计算反射系数、透射系数、反射率和透射率。

1.11　如图 1.28 所示，玻璃块周围介质(水)的折射率为 1.33。若光束射向玻璃块的入射角为 45°，玻璃块的折射率至少应为多大才能使透入光束发生全反射？

1.12　如图 1.29 所示，一根圆柱形光纤，纤芯折射率为 n_1，包层折射率为 n_2，且 $n_1>n_2$，(1) 证明：入射光的最大孔径角 2β 满足关系式 $\sin\beta=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$；(2) n_1=1.62，n_2=1.52，

求最大孔径角 2β。

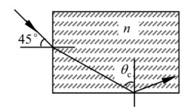


图 1.28　习题 1.11 用图

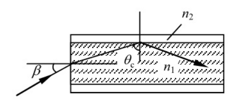


图 1.29　习题 1.12 用图

1.13　如图 1.30 所示，一根弯曲圆柱形光纤，其纤芯直径为 D，曲率半径为 R，(1) 证明：入射光的最大孔径角 2β 满足关系式 $\sin\beta=\sqrt{n_1^2-n_2^2\left(1+D/2R\right)^2}$；(2) 若 n_1=1.62，n_2=1.52，D=70 μm，R=12mm，求最大孔径角 2β。

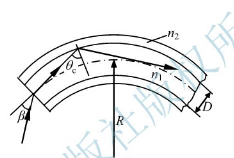


图 1.30　习题 1.13 用图

1.14　如图 1.31 所示，光束以很小角度入射到一块折射率 n=1.50 的玻璃平板上。试求相继从平板反射的两束光和透射的两束光的相对强度。

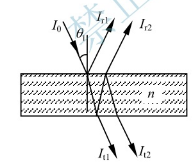
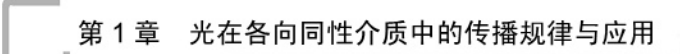


图 1.31　习题 1.14 用图

1.15　两个振动方向相同的单色波在空间某一点 P 产生的光振动分别表示为 $E_1=E_{10}\cos(\alpha_1-\omega t)$ 和 $E_2=E_{20}\cos(\alpha_2-\omega t)$，若 $\omega=2\pi\times10^{15}\,\text{Hz}$，$E_{10}=6\,\text{V/m}$，$E_{20}=8\,\text{V/m}$，$\alpha_1$=0，$\alpha_2=\dfrac{\pi}{2}$。求 P 点合振动表达式。

1.16　两个振动方向相同，沿 z 方向传播的光波可以表示为 $E_1=E_0\sin\left[k(z+\Delta z)-\omega t\right]$，$E_2=E_0\sin(kz-\omega t)$。求合振动的表达式。

1.17　在真空中沿 z 方向传播的两个振动方向相同的单色波可以分别表示为




$E_1 = E_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \nu t\right)\right]$， $E_2 = E_0 \cos\left\{2\pi\left[\frac{z}{(\lambda+\Delta\lambda)} - (\nu - \Delta\nu)t\right]\right\}$。若 $E_0 = 100\,\text{V/m}$， $\nu = 6\times10^{14}\,\text{Hz}$，$\Delta\nu = 10^{18}\,\text{Hz}$，试求合成波在 $z=0$， $z = 1\text{m}$ 处的强度随时间的变化关系。

1.18　利用波的复数表达式求两个波 $E_1 = E_0\cos(kz+\omega t)$， $E_2 = -E_0\cos(kz-\omega t)$ 的合成波。

1.19　证明群速度可以表示为：$\upsilon_g = \dfrac{c}{n+\omega(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega)}$。

1.20　计算下列各种情况的群速度：(1) $\upsilon = \sqrt{g\lambda/2\pi}$；(2) $\upsilon = \sqrt{2\pi T/\rho\lambda}$；(3) $n = a + b/\lambda^2$；(4) $\omega = ak^2$。

第 2 章 光在各向异性介质中的传播规律与应用



教学目的与要求

- 掌握晶体的基本性质
- 掌握光轴、主平面和主截面的基本概念
- 掌握光在晶体中传播的基本规律
- 掌握光在晶体中的菲涅耳方程
- 掌握光在单轴晶体中的传播规律
- 了解波矢折射率曲面方程和光线折射率曲面方程
- 了解波矢曲面方程和光线曲面方程
- 了解波矢速度面方程和光线速度面方程
- 掌握光在晶体表面的反射和折射规律
- 了解双轴晶体产生的锥形折射



本章引言



【双折射】

光波在诸如石英、方解石等介质中传播时，其传播规律与光的传播方向有关，这类介质称为各向异性介质。

当光波在各向异性介质中传播时，需要分析和讨论光波电磁场各个矢量的变化，从而掌握光波电磁场在各向异性介质中传播时所遵循的普遍规律；当光波遇到两种介质的交界面时，需要分析和讨论光波在两种介质的交界面处所产生的双反射或双折射，从而掌握两束光波对应的折射率和速度等关系。



【激光调 Q 技术】

在实际中，可以利用晶体的折射率随传播方向的变化来进行激光倍频；可以利用晶体的电光效应构成激光器的调 Q 装置，图 2.0 为调 Q、倍频固体激光器结构示意图，该激光器中用到了 KDP、YAG 和 KTP 晶体，可见，晶体在光电子技术中起着重要的作用。



【晶体】



本章围绕光在各向异性介质中和界面处所遵循的基本规律而展开。首先，利用微分形式的麦克斯韦方程组推导出光波电磁场在各向异性介质中传播的基本规律。在此基础上推导出光在晶体中的菲涅耳方程，通过求解波矢菲涅耳方程，讨论 o 光和 e 光的振动方向、e 光的离散角。利用光在晶体中的菲涅耳方程，推导出波矢折射率曲面方程和光线折射率曲面方程、波矢曲面方程和光线曲面方程、波矢速度面方程和光线速度面方程。其次，通过斯涅耳作图法和惠更斯作图法对光在晶体表面的双反射和双折射进行讨论。最后，通过分析晶体内锥形折射和外锥形折射的条件和推导所满足的方程来加深对光波在各向异性介质中传播规律的理解和掌握。

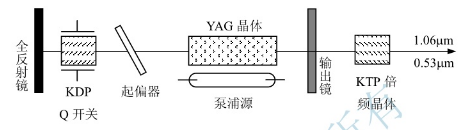


图 2.0　调 Q、倍频固体激光器结构示意图

2.1　各向异性晶体概述

晶体结构的主要特点是组成晶体的原子、分子、离子或其集团在空间排列组合时，表现出一定的空间周期性和对称性。这种结构特点导致了晶体宏观性质的各向异性(anisotropy)。本节将介绍晶体的基本性质；寻常光和非常光；晶体的光轴；主平面、主截面和入射面；介电张量和折射率张量以及张量的变换。加强对本节基本概念和基本关系的理解和掌握是学好本章其他内容的重要基础。

1. 各向异性晶体(anisotropic crystal)的基本性质

由于各向同性介质的介电常数或折射率是一个常数，因此，当光在各向同性介质中传播时，光的频率、相速度是相同的，与光的传播方向无关。而在各向异性介质中则完全不同，介电常数或折射率与光的传播方向及电矢量的振动方向有着复杂的关系。

所谓各向异性介质一般指光学晶体，它与非晶体的各向同性介质的区别主要有两个方面：一是周期性，二是对称性。

周期性是指构成晶体的原子或分子在空间按一定的方向排列成具有周期性的结构。图 2.1 所示为一种晶体的正交结构。周期排列的骨架称为晶格，原子重心点称为结点，结点构成的总体称为空间点阵。整个晶体结构可以看作是结点沿空间不同方向按一定距离平移而成，其平移距离为周期。

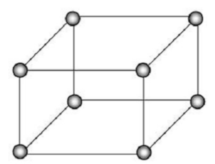


图 2.1　晶体的正交结构

因为不同方向的周期不一样，表现为原子疏密随方向不同而产生差异，因此晶体的光学性质，甚至电、磁性质与方向有密切的关系，这就是晶体的介电常数或折射率与光的传播方向有关的根本原因。

所谓对称性就是通过某种操作能恢复原状的性质。对称分为轴对称、面对称和中心对称。按目前的研究情况，晶体在结构上可以分为七大类：正交、单斜、三斜、三角、四角、六角和立方。而每一大类因为加入原子的位置不同又可以把晶体分为 32 个点群。


【寻常光和非常光】

2. 寻常光与非常光

当一束单色光在各向同性介质的界面折射时，折射光只有一束，而且遵循折射定律。但是，当一束单色光在各向异性晶体的界面折射时，一般可以产生两束折射光，这种现象称为双折射。在两束折射光中，有一束总是遵循折射定律，把这束折射光称为寻常光，用符号 o 表示；另一束折射光则不然，一般情况下，即使入射角等于零，其折射角也不等于零，称它为非常光，用符号 e 表示。

晶体的双折射(birefringence)现象表示晶体在光学上是各向异性的，更具体地说，对于振动方向相互垂直的两个线偏振光，在晶体中有着不同的传播速度(或折射率)，从光的电磁理论来看，晶体的这种特殊的光学性质是光波电磁场与晶体相互作用的结果。晶体在光学上的各向异性，实质上表示晶体与入射光电磁场相互作用的各向异性。应当指出，许多非晶体物质，其分子、原子也具有不对称的方向性，但由于它们在物质中的无规则排列和运动，在整体上仍呈现出宏观的规则性。只是在外界一定方向的力的作用下，它们的取向可能出现一定的规则性，从而呈现出各向同性，这就是人为的各向同性。

3. 晶体的光轴

在晶体中有着一个特殊的方向，当光在晶体中沿着这个方向传播时 o 光和 e 光除了振动方向以外完全重合，晶体内这个特殊的方向称为晶体的光轴。各向异性晶体按光学性质可以分成两类，即单轴晶体和双轴晶体(biaxial crystal)。只有一个光轴的晶体称为单轴晶体，如方解石、石英、KDP 等。自然界的大部分晶体具有两个光轴，如云母、蓝宝石等，这类晶体称为双轴晶体。另外，像 NaCl、CaF_2 等晶体则属于立方晶系的晶体，是各向同性的，不产生双折射，这类晶体与各向同性介质一样，下面再提到晶体都是指各向异性晶体。

4. 主平面、主截面与入射面


【主平面】

在单轴晶体内，由光线和光轴组成的平面称为主平面。由 o 光线和光轴组成的平面称为 o 光的主平面；由 e 光线和光轴组成的平面称为 e 光的主平面。在一般情况下，o 光的主平面和 e 光的主平面是不重合的。由晶体表面法线和光轴组成的平面称为主截面。由入射光波矢和晶体表面法线构成的平面称为入射面。

主平面、主截面和入射面 3 个平面重合是在特定条件下实现的。当光波在由光轴和晶体表面法线组成的平面内入射时，则 o 光和 e 光都在这个平面内，这个平面也就是 o 光和 e 光的共同的主平面。在实际应用中，都有意选择入射面与主截面重合，以使所研究的双折射现象大为简化。

如果用检偏器(详见 6.1 节)来检验 o 光和 e 光的偏振状态，就会发现 o 光和 e 光都是线偏振光，并且，o 光的电矢量与 o 光主平面垂直，因而总是与光轴垂直；e 光的电矢量在 e 光主平面内，因而它与光轴的夹角就随着传播方向的不同而改变。由于 o 光的主平面和 e 光的主平面在一般情况下并不重合，所以 o 光和 e 光的电矢量方向一般也不互相垂直，只有当主截面是 o 光和 e 光的共同主平面时，o 光和 e 光的电矢量才互相垂直。



5. 介电张量与折射率张量

在各向异性介质中，电极化强度 **P** 的大小和方向都依赖于电场的方向。因此，一般来说 **D** 和 **E** 不再同向。当电场不是很强时，**D** 的 3 个分量和 **E** 的 3 个分量之间呈线性关系，可以表示为

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z \\ D_y = \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z \\ D_z = \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z \end{cases} \tag{2.1-1}$$

$\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\cdots$ 组成介电张量 $[\varepsilon]$。因此，矢量 **D** 是介电张量 $[\varepsilon]$ 与 **E** 的乘积，即

$$\boldsymbol{D} = [\varepsilon]\boldsymbol{E} \tag{2.1-2}$$

将式(2.1-1)和式(2.1-2)用矩阵形式写出，就是

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{2.1-3}$$

为了讨论问题方便起见，经常利用另一种形式的物质方程，即从式(2.1-3)中解出 **E**，并写成

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{bmatrix} 1/n_{xx}^2 & 1/n_{xy}^2 & 1/n_{xz}^2 \\ 1/n_{yx}^2 & 1/n_{yy}^2 & 1/n_{yz}^2 \\ 1/n_{zx}^2 & 1/n_{zy}^2 & 1/n_{zz}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} \tag{2.1-4}$$

或者简写为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}[n]\boldsymbol{D} \tag{2.1-5}$$

式中，ε_0 是真空介电常数，$[n]$ 称为折射率张量。

6. 张量的变换

介电张量和折射率张量是描述介质特性的物理量，但它们的具体形式会随着坐标系变换而改变。设 xyz 为旧坐标，$x'y'z'$ 为新坐标，新坐标系的 3 个沿坐标轴方向的单位矢量在旧坐标系中的分量可以表示为

$$\begin{cases} x' = a_{xx}x + a_{xy}y + a_{xz}z \\ y' = a_{yx}x + a_{yy}y + a_{yz}z \\ z' = a_{zx}x + a_{zy}y + a_{zz}z \end{cases} \tag{2.1-6}$$

这里，a_{xx}、a_{xy}和a_{xz} 是新坐标 x' 的单位矢量在旧坐标系中的 3 个分量，其余类推。也就是说，a_{ij} 是新轴 i' 与旧轴 i 之间的夹角的余弦。一般来说，$a_{ij} \neq a_{ji}$。

根据矢量的坐标变换公式，电矢量在新旧坐标系里的 3 个分量之间的关系为

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{2.1-7}$$

或者简写为

$$E' = [a]E \tag{2.1-8}$$

同样，对于电位移矢量也有

$$D' = [a]D \tag{2.1-9}$$

由式(2.1-2)、式(2.1-8)和式(2.1-9)可以得到

$$D' = [a][\varepsilon][a]^{-1} E' \tag{2.1-10}$$

因此，$[a][\varepsilon][a]^{-1}$描述了新坐标系中 $\boldsymbol{D}'$ 与 $\boldsymbol{E}'$ 之间的关系，它就是介电张量在新坐标系中的表达式，用$[\varepsilon']$表示。于是有

$$[\varepsilon'] = [a][\varepsilon][a]^{-1} \tag{2.1-11}$$

折射率张量也有同样的变换公式：

$$[n'] = [a][n][a]^{-1} \tag{2.1-12}$$

在晶体中，总可以找到一个直角坐标系，使$[\varepsilon]$在这个坐标系中呈对角矩阵形式，因此式(2.1-3)可以写成

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{2.1-13}$$

x、y和z 是 3 个相互垂直的方向，称为晶体的主轴方向，ε_x、ε_y和ε_z 称为晶体的主介电常数。

由式(2.1-13)可见，若$\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$，则只有当电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向沿主轴方向时，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 才有相同的方向，一般地，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 有不同的方向，如图 2.2 所示。

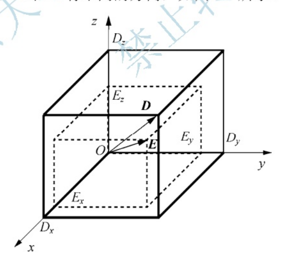


图 2.2　晶体中 **D** 和 **E** 的关系

上述$\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$的情况对应的是双轴晶体，而单轴晶体对应于$\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$的情况，这时晶体光轴平行于 z 方向，并且，当 $\boldsymbol{E}$ 的方向沿 z 轴方向或沿垂直于 z 轴的任一方向时，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 同方向。各向同性晶体对应于$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$的情况，这时在晶体中任意一个方向上，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都同方向。

本节介绍了晶体的基本性质；晶体双折射时产生的寻常光和非常光；重要的概念：晶



体的光轴、主平面、主截面和入射面；介电张量和折射率张量以及张量的变换。本节要点见表 2-1。

表 2-1　晶体的性质、结构、种类及概念

性　质	结　构	种　类	**D** 和 **E** 的关系	光　轴	主　平　面	主　截　面
周期性 对称性 各向异性	正交、单斜、三斜、三角、四角、六角、立方	单轴 $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ 双轴 $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$	$\boldsymbol{D} = [\varepsilon]\boldsymbol{E}$	光在晶体中传播时 o 光和 e 光重合的方向	光线和光轴构成的平面	晶体表面法线和光轴构成的平面

2.2　光在晶体中传播的基本规律

与研究各向同性介质中光的传播规律一样，本节仍然用麦克斯韦方程组作为理论基础，研究各向异性介质中单色平面波的各矢量关系；晶体中光波的相速度和光线速度以及晶体中 **E** 和 **D** 的关系。

2.2.1　晶体中单色平面波的各矢量关系

光波是一种电磁波，光波在物质中的传播过程可以用麦克斯韦方程组和物质方程来描述。在透明非磁性各向同性介质中，它们可以写成

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\ \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \end{cases} \tag{2.2-1}$$

在各向异性晶体中，麦克斯韦方程组仍然适用，但物质方程要用 $\boldsymbol{D} = [\varepsilon]\boldsymbol{E}$ 来代替，即介电常数不再是一个标量常数，而是一个二阶张量。设晶体中传播着一个单色平面波，这个平面波可以写为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{D}_0 \\ \boldsymbol{H}_0 \end{pmatrix} \exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right)\right] \tag{2.2-2}$$

把式(2.2-2)代入式(2.2-1)的第三式和第四式，得到

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{2.2-3}$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega \boldsymbol{D} \tag{2.2-4}$$

由式(2.2-3)和式(2.2-4)可以看出，**H** 垂直于 **E** 和 **k**，**D** 垂直于 **H** 和 **k**，所以 **H** 垂直于 **E**、**D**

和 $\boldsymbol{k}$，因此，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 在垂直于 $\boldsymbol{H}$ 的同一平面内。另外，代表能量传播方向即光线方向的坡印亭矢量为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$，因此，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 都与 $\boldsymbol{H}$ 垂直，即 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 是共面的。

在一般情况下，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 不同方向，所以 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 也不同方向。假设 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的夹角为 α，那么 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的夹角也为 α。晶体中单色平面波的各矢量关系如图 2.3 所示。

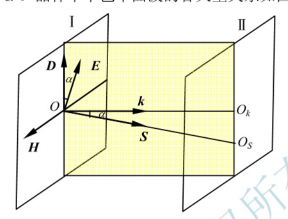


图 2.3　晶体中单色平面波的各矢量关系

2.2.2　晶体中光波的相速度与光线速度

由图 2.3 可以看出，当平面波从波面Ⅰ的位置传播到波面Ⅱ的位置时，波矢就从 O 点传播到 O_k 点，而光线就从 O 点传播到 O_S 点。因此，晶体中光波的相速度 υ_{p} 和光线速度 υ_{s} 也不相等。根据电磁场能量密度公式有

$$w_{\mathrm{em}}=w_{\mathrm{e}}+w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) \tag{2.2-5}$$

因为电场能量密度等于磁场能量密度，因此

$$w_{\mathrm{em}}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} \tag{2.2-6}$$

利用式(2.2-4)可以得到

$$w_{\mathrm{em}}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=\frac{k}{\omega}\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{k}_0)=\frac{n}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{k}_0=\frac{n}{c}|S|\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{k}_0 \tag{2.2-7}$$

$\boldsymbol{k}_0$ 是 $\boldsymbol{k}$ 方向的单位矢量，$\boldsymbol{s}_0$ 是 $\boldsymbol{S}$ 方向的单位矢量，对于各向同性介质，因为 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 方向一致，所以有

$$w_{\mathrm{em}}=\frac{n}{c}|S| \tag{2.2-8}$$

对于各向异性介质，因为 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 方向不一致，则

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\mathrm{p}}=\upsilon_{\mathrm{p}}\boldsymbol{k}_0=\frac{|S|}{w_{\mathrm{em}}}\boldsymbol{k}_0=\frac{c}{n}\boldsymbol{k}_0 \tag{2.2-9}$$

由于光线速度是能流密度与能量密度之比，因此

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\mathrm{s}}=\upsilon_{\mathrm{s}}\boldsymbol{s}_0=\frac{|S|}{w_{\mathrm{em}}}\boldsymbol{s}_0=\frac{c}{n\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{k}_0}\boldsymbol{s}_0 \tag{2.2-10}$$

所以相速度和光线速度有如下关系：



$$\upsilon_{\mathrm{p}} = \upsilon_{\mathrm{s}} \boldsymbol{s}_0 \cdot \boldsymbol{k}_0 = \upsilon_{\mathrm{s}} \cos\alpha \tag{2.2-11}$$

因此，单色平面波的相速度是其光线速度在波矢方向上的投影。

2.2.3　晶体中 *E* 与 *D* 的关系

由式(2.2-4)可以得到

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{\omega} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{k} \tag{2.2-12}$$

将式(2.2-3)代入式(2.2-12)，得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \frac{1}{\mu_0 \omega^2} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{k} = -\frac{k^2}{\mu_0 \omega^2} \boldsymbol{k}_0 \times (\boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{E}) \\ &= -\frac{n^2}{\mu_0 c^2} \boldsymbol{k}_0 \times (\boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{E}) = -\varepsilon_0 n^2 \boldsymbol{k}_0 \times (\boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{E}) \end{aligned} \tag{2.2-13}$$

利用恒等式 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ 可以将式(2.2-13)写成

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 n^2 \left[\boldsymbol{E} - \boldsymbol{k}_0 (\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{E}) \right] \tag{2.2-14}$$

式(2.2-14)中方括号内的矢量 $\left[\boldsymbol{E} - \boldsymbol{k}_0 (\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{E}) \right]$ 实际上表示 $\boldsymbol{E}$ 在垂直于 $\boldsymbol{k}$ (即平行于 $\boldsymbol{D}$)方向的分量，也就是 $\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 方向的分量，记为 $\boldsymbol{E}_D$，因此，式(2.2-14)可以改写为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 n^2 \boldsymbol{E}_D \tag{2.2-15}$$

由于 $\boldsymbol{E}_D = \boldsymbol{E} \cos\alpha$，因此，结合式(2.2-15)有

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{E}_D}{\cos\alpha} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0 n^2 \cos\alpha} = \frac{1}{\varepsilon_0 (n\cos\alpha)^2} \boldsymbol{D} \cos\alpha = \frac{1}{\varepsilon_0 (n\cos\alpha)^2} \boldsymbol{D}_E \tag{2.2-16}$$

式(2.2-16)中，$\boldsymbol{D}_E$ 表示 $\boldsymbol{D}$ 在 $\boldsymbol{E}$ 方向的分量，$\boldsymbol{E}_D$ 和 $\boldsymbol{D}_E$ 的定义如图 2.4 所示。

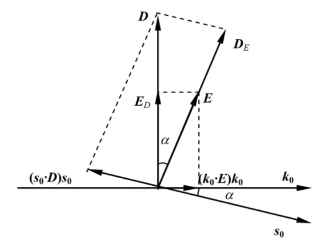


图 2.4　$\boldsymbol{E}_D$ 和 $\boldsymbol{D}_E$ 示意图

根据折射率的定义 $n = c/\upsilon_{\mathrm{p}}$，因此，可以在形式上定义“光线折射率”(或射线折射率、能流折射率)为

$$n_{\mathrm{s}}=\frac{c}{\upsilon_{\mathrm{s}}}=\frac{c}{\upsilon_{\mathrm{p}}}\cos\alpha=n\cos\alpha \tag{2.2-17}$$

因此，可将式(2.2-16)表示为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0 n_{\mathrm{s}}^2}\boldsymbol{D}_E \tag{2.2-18}$$

或者

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0 n_{\mathrm{s}}^2}\left[\boldsymbol{D}-\boldsymbol{s}_0\left(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{D}\right)\right] \tag{2.2-19}$$

式(2.2-14)、式(2.2-15)、式(2.2-18)和式(2.2-19)是麦克斯韦方程组的直接推论，它们决定了在晶体中传播的电磁波的结构，给出了沿某一$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{S})$方向传播的光波电场$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D})$与晶体特性参数$n(n_{\mathrm{s}})$的关系，因而是描述晶体光学性质的基本方程。

应当注意的是，式(2.2-14)和式(2.2-19)在形式上相似，因此可以得到如下两行对应的变量：

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{S},\ c,\ \varepsilon_0,\ \upsilon_{\mathrm{p}},\ n,\ \varepsilon_1,\ \cdots,\ \upsilon_1,\cdots \\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{S},\ \boldsymbol{k},\ \dfrac{1}{c},\ \dfrac{1}{\varepsilon_0},\ \dfrac{1}{\upsilon_{\mathrm{s}}},\ \dfrac{1}{n_{\mathrm{s}}},\ \dfrac{1}{\varepsilon_1},\ \cdots,\ \dfrac{1}{\upsilon_1},\cdots \end{array} \tag{2.2-20}$$

式(2.2-20)称为对偶关系，利用这一规则，可以很方便地完成光在晶体中传播规律的研究。

本节以麦克斯韦方程组为理论基础，讨论了各向异性介质中单色平面波的各矢量关系；光波的相速度和光线速度以及 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的关系。本节要点见表 2-2。

表 2-2　光在晶体中的传播规律

位置关系	矢量关系	相速度与光线速度	基本方程
$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 四矢共面，并且都与 $\boldsymbol{H}$ 垂直	$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{D}\perp\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的夹角等于 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的夹角	$\upsilon_{\mathrm{p}}=\upsilon_{\mathrm{s}}\cos\alpha$	$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0 n^2\left[\boldsymbol{E}-\boldsymbol{k}_0(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{E})\right]$ $\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{\varepsilon_0 n_{\mathrm{s}}^2}\left[\boldsymbol{D}-\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{D})\right]$

2.3　光在晶体中的菲涅耳方程

波矢菲涅耳方程和光线菲涅耳方程是晶体光学中十分重要也是最基本的方程，它们反映了波矢方向和光线方向所对应的两个线偏振光波的折射率或速度。本节将推导这两个方程。

2.3.1　波矢菲涅耳方程

为了考察晶体的光学特性，选取主轴坐标系，因而物质方程为

$$D_i=\varepsilon_i E_i \tag{2.3-1}$$

式(2.3-1)中 i 表示 x、y、z，将基本方程 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0 n^2\left[\boldsymbol{E}-\boldsymbol{k}_0(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{E})\right]$ 写成分量形式

$$D_i=\varepsilon_0 n^2\left[E_i-k_{0i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{E})\right] \tag{2.3-2}$$



将式(2.3-1)代入式(2.3-2)，可以得到

$$D_i = \varepsilon_0 n^2 \left[\frac{D_i}{\varepsilon_i} - k_{0i}(\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{E}) \right] \tag{2.3-3}$$

将 $\varepsilon_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ri}$ 代入，经过整理可得

$$D_i = \frac{\varepsilon_0 k_{0i}(\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{E})}{\dfrac{1}{\varepsilon_{ri}} - \dfrac{1}{n^2}} \tag{2.3-4}$$

由于 $\boldsymbol{D} \perp \boldsymbol{k}_0$，因此 $\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{k}_0 = 0$，也就是 $D_x k_{0x} + D_y k_{0y} + D_z k_{0z} = 0$，因此

$$\frac{k_{0x}^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{rx}}} + \frac{k_{0y}^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{ry}}} + \frac{k_{0z}^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_{rz}}} = 0 \tag{2.3-5}$$

这一方程被称为波矢菲涅耳方程。它给出了单色平面波在晶体中传播时，光波折射率 n 与光波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$ 之间所满足的关系。波矢菲涅耳方程通分后可以化为一个 n^2 的二次方程，如果波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$ 已知，一般地由这个方程可解得两个不相等的实根 n_1^2 和 n_2^2，而其中有意义的只有等于 n_1 和 n_2 的两个正根。这表明在晶体中对应于光波的一个传播方向 $\boldsymbol{k}_0$，可以有两种不同的光波折射率。把 n_1 和 n_2 代入式(2.3-4)，便可以确定对应的两个光波的 $\boldsymbol{D}$ 矢量方向，因此，也一定有两个光波的 $\boldsymbol{E}$ 矢量方向。

通过计算可以知道，两个光波都是线偏振光，并且它们的 $\boldsymbol{D}$ 矢量相互垂直，$\boldsymbol{E}$ 矢量也相互垂直。由于 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{k}$ 四矢共面，并且 $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{s}_0$，所以，这两个线偏振光波有不同的光线方向($\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$)和光线速度(υ_1 和 υ_2)，这样也从理论上阐明了双折射的存在。与 $\boldsymbol{k}_0$ 对应的 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{S}$ 如图 2.5 所示。因为 $n_i^2 = \varepsilon_{ri}$，所以又可以得到

$$\frac{k_{0x}^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n_x^2}} + \frac{k_{0y}^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n_y^2}} + \frac{k_{0z}^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n_z^2}} = 0 \tag{2.3-6}$$

式中，n 是 $\boldsymbol{k}_0$ 方向的折射率；n_x、n_y和n_z 是 3 个主轴方向的折射率，被称为主轴折射率。

由于 $n^2 = \dfrac{c^2}{\upsilon_p^2}$，$n_i^2 = \dfrac{c^2}{\upsilon_i^2}$，因此，上式可改写为

$$\frac{k_{0x}^2}{\upsilon_p^2 - \upsilon_x^2} + \frac{k_{0y}^2}{\upsilon_p^2 - \upsilon_y^2} + \frac{k_{0z}^2}{\upsilon_p^2 - \upsilon_z^2} = 0 \tag{2.3-7}$$

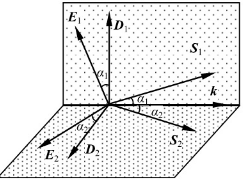


图 2.5　与 $\boldsymbol{k}_0$ 对应的 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{S}$

式中，υ_p 是 $\boldsymbol{k}_0$ 方向的相速度；υ_x、υ_y和υ_z 是 3 个主轴方向的相速度。式(2.3-6)和式(2.3-7)是波矢菲涅耳方程的另外两种形式。式(2.3-7)给出了单色平面波在晶体中传播时，光波相速度 υ_p 与光波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$ 之间所满足的关系。由于式(2.3-7)是关于 υ_p^2 的二次方程，这表明在晶体中对应于

光波的一个传播方向 $\boldsymbol{k}_0$，可以有两种不同的光波相速度。

2.3.2 光线菲涅耳方程

上面讨论的波矢菲涅耳方程确定了在给定的 $\boldsymbol{k}$ 方向两个线偏振光波的折射率或相速度。类似地，将基本方程 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0 n_s^2}\left[\boldsymbol{D}-\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{D})\right]$ 写成分量形式

$$\boldsymbol{E}_i=\frac{1}{\varepsilon_0 n_s^2}\left[\boldsymbol{D}_i-\boldsymbol{s}_{0i}(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{D})\right] \tag{2.3-8}$$

将式(2.3-1)代入式(2.3-8)中，可以得到

$$\boldsymbol{E}_i=\frac{1}{\varepsilon_0 n_s^2}\left[\varepsilon_i\boldsymbol{E}_i-\boldsymbol{s}_{0i}(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{D})\right] \tag{2.3-9}$$

将 $\varepsilon_i=\varepsilon_0\varepsilon_{ri}$ 代入式(2.3-9)，经过整理可得

$$E_i=\frac{s_{0i}(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{D})/\varepsilon_0}{\varepsilon_{ri}-n_s^2} \tag{2.3-10}$$

由于 $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{s}_0$，因此 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{s}_0=0$，也就是 $E_x s_{0x}+E_y s_{0y}+E_z s_{0z}=0$。因此，得到相应于光线方向 $\boldsymbol{s}_0$ 的光线菲涅耳方程

$$\frac{s_{0x}^2}{n_s^2-\varepsilon_{rx}}+\frac{s_{0y}^2}{n_s^2-\varepsilon_{ry}}+\frac{s_{0z}^2}{n_s^2-\varepsilon_{rz}}=0 \tag{2.3-11}$$

因为 $n_i^2=\varepsilon_{ri}$，所以又可以得到

$$\frac{s_{0x}^2}{n_s^2-n_x^2}+\frac{s_{0y}^2}{n_s^2-n_y^2}+\frac{s_{0z}^2}{n_s^2-n_z^2}=0 \tag{2.3-12}$$

式(2.3-12)又可以改写为

$$\frac{s_{0x}^2}{\frac{1}{\upsilon_s^2}-\frac{1}{\upsilon_x^2}}+\frac{s_{0y}^2}{\frac{1}{\upsilon_s^2}-\frac{1}{\upsilon_y^2}}+\frac{s_{0z}^2}{\frac{1}{\upsilon_s^2}-\frac{1}{\upsilon_z^2}}=0 \tag{2.3-13}$$

式中，n_s和υ_s 分别是 $\boldsymbol{s}_0$ 方向的光线折射率和光线速度，ε_x、ε_y、ε_z 和 υ_x、υ_y、υ_z 分别是3个主轴方向的介电常数和相速度。式(2.3-12)和式(2.3-13)是光线菲涅耳方程的另外两种形式。光线菲涅耳方程给出了单色平面波在晶体中传播时，光线折射率 n_s 和光线速度 υ_s 与光线方向 $\boldsymbol{s}_0$ 之间所满足的关系。式(2.3-11)、式(2.3-12)和式(2.3-13)分别是关于 n_s^2 和 υ_s^2 的二次方程，这表明在晶体中对应于一个光线方向 $\boldsymbol{s}_0$，可以有两种不同的光线折射率和光线速度。

式(2.3-11)、式(2.3-12)和式(2.3-13)可以由式(2.3-5)、式(2.3-6)和式(2.3-7)直接通过式(2.2-20)的变量代换得出。因此，无论是根据式(2.3-5)、式(2.3-6)和式(2.3-7)，还是根据式(2.3-11)、式(2.3-12)和式(2.3-13)都可以同样地完成光在晶体中的传播规律的研究。

本节推导了波矢菲涅耳方程和光线菲涅耳方程。本节的要点见表 2-3。



表 2-3　波矢菲涅耳方程和光线菲涅耳方程

波矢菲涅耳方程	$\dfrac{k_{0x}^2}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n_x^2}}+\dfrac{k_{0y}^2}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n_y^2}}+\dfrac{k_{0z}^2}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n_z^2}}=0$	$\dfrac{k_{0x}^2}{\upsilon_p^2-\upsilon_x^2}+\dfrac{k_{0y}^2}{\upsilon_p^2-\upsilon_y^2}+\dfrac{k_{0z}^2}{\upsilon_p^2-\upsilon_z^2}=0$
光线菲涅耳方程	$\dfrac{s_{0x}^2}{n_s^2-n_x^2}+\dfrac{s_{0y}^2}{n_s^2-n_y^2}+\dfrac{s_{0z}^2}{n_s^2-n_z^2}=0$	$\dfrac{s_{0x}^2}{\dfrac{1}{\upsilon_s^2}-\dfrac{1}{\upsilon_x^2}}+\dfrac{s_{0y}^2}{\dfrac{1}{\upsilon_s^2}-\dfrac{1}{\upsilon_y^2}}+\dfrac{s_{0z}^2}{\dfrac{1}{\upsilon_s^2}-\dfrac{1}{\upsilon_z^2}}=0$

2.4　折射率椭球方程

在光学系统设计和光学晶体的实际应用中，经常用到的是晶体的折射率，因此，希望能把波矢量 $\boldsymbol{k}$ 与折射率直接联系起来。利用场能密度公式可以推出折射率与电位移 $\boldsymbol{D}$ 的关系。由于 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 垂直，因此可以得到 $\boldsymbol{k}$ 与折射率的关系。本节将推导晶体的折射率椭球，并对单轴和双轴晶体的折射率椭球进行讨论。

2.4.1　折射率椭球

在晶体的介电主轴坐标系中，物质方程有如下简单形式

$$D_x=\varepsilon_0\varepsilon_{rx}E_x,\ D_y=\varepsilon_0\varepsilon_{ry}E_y,\ D_z=\varepsilon_0\varepsilon_{rz}E_z \tag{2.4-1}$$

因此，电磁场的能量密度表达式可以写为

$$w_{em}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_{rx}}+\frac{D_y^2}{\varepsilon_{ry}}+\frac{D_z^2}{\varepsilon_{rz}}\right) \tag{2.4-2}$$

在不考虑光波在晶体中传播被吸收的情况下，电磁场的能量密度是一定的，因此有

$$A=\left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_{rx}}+\frac{D_y^2}{\varepsilon_{ry}}+\frac{D_z^2}{\varepsilon_{rz}}\right) \tag{2.4-3}$$

式中，$A=w_{em}\varepsilon_0$。考虑到 $n_i^2=\varepsilon_{ri}(i=x,y,z)$，可以得到

$$A=\frac{D_x^2}{n_x^2}+\frac{D_y^2}{n_y^2}+\frac{D_z^2}{n_z^2} \tag{2.4-4}$$

若用 x、y和z 代替 $D_x/\sqrt{A}$、$D_y/\sqrt{A}$和$D_z/\sqrt{A}$，并取为空间直角坐标系，则可以得到

$$\frac{x^2}{n_x^2}+\frac{y^2}{n_y^2}+\frac{z^2}{n_z^2}=1 \tag{2.4-5}$$

这个方程代表一个椭球，它的半轴等于主轴折射率，并与介电主轴的方向重合。这个椭球称为折射率椭球(又称光率体)，如图 2.6 所示。折射率椭球具有以下两点重要性质，它们是利用折射率椭球的主要依据。

第一，折射率椭球任意一条矢径的方向表示光波 $\boldsymbol{D}$ 矢量的一个方向，矢径的长度表示 $\boldsymbol{D}$ 矢量沿矢径方向振动的光波的折射率。因此，折射率椭球的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{r} = n\boldsymbol{d} \tag{2.4-6}$$

式中，$\boldsymbol{d}$ 是 $\boldsymbol{D}$ 矢量方向的单位矢量。

第二，从折射率椭球的原点 O 出发，作平行于给定波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$ 的直线 OP，再通过原点 O 作一平面与 OP 垂直，该平面与椭球的截线是一个椭圆，如图 2.7 所示。椭圆的长轴方向和短轴方向就是对应于波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$ 的两个允许存在的光波的 $\boldsymbol{D}$ 矢量($\boldsymbol{D}_1$和$\boldsymbol{D}_2$)方向，而长、短半轴的长度则分别等于两个光波的折射率 n_1 和 n_2。

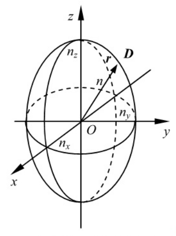


图 2.6　折射率椭球

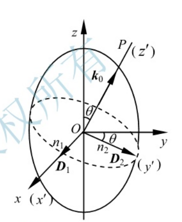


图 2.7　$\boldsymbol{k}_0$ 方向的折射率 n_1 和 n_2



【单轴晶体的折射率椭球】

2.4.2　单轴晶体的折射率椭球

对于单轴晶体，$n_x = n_y = n_o$，$n_z = n_e$，所以其折射率椭球的方程为

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \tag{2.4-7}$$

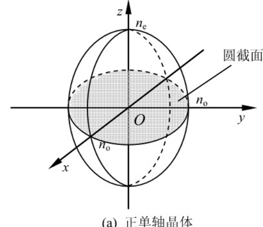
这一方程表示的是一个旋转轴为光轴(z 轴)的旋转椭球。图 2.8(a)和图 2.8(b)分别给出了正单轴晶体$(n_o < n_e)$和负单轴晶体$(n_o > n_e)$的折射率椭球的形状。

1. 由单轴晶体的折射率椭球可以得出以下几点结论

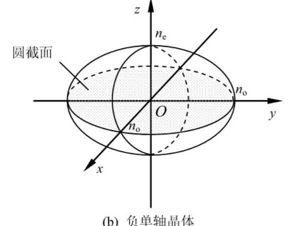
(1) 椭球在 xOy 平面上的截线是一个圆，其半径为 n_o。这表示当光波沿着 z 轴方向传播时，只有一种折射率的两个光波，其 $\boldsymbol{D}$ 矢量可以取垂直于 z 轴的任意方向。所以 z 轴就是单轴晶体的光轴。

(2) 椭球在 xOz、yOz 或其他包含 z 轴的平面内的截线是一个椭圆，它的两个半轴长度分别为 n_o 和 n_e。这表示当波矢方向垂直于光轴方向时，可以允许两个线偏振光波传播，一个光波的 $\boldsymbol{D}$ 矢量平行于光轴方向，折射率为 n_e，另一个光波的 $\boldsymbol{D}$ 矢量垂直于光轴和波矢方向，折射率为 n_o。显然，前者就是 e 光波，而后者是 o 光波。





(a) 正单轴晶体



(b) 负单轴晶体

图 2.8　单轴晶体的折射率椭球

(3) 当波矢方向与光轴成 θ 角时(图 2.7)，通过椭球中心 O 的垂直于 $\boldsymbol{k}_0$ 的平面与椭球的截线也是一个椭圆，它的两个半轴长度一个为 n_o，另一个介于 n_o 和 n_e 之间。

从图 2.7 可以看出，由于旋转椭球的 x 轴和 y 轴的任意性，可以假设 $\boldsymbol{k}_0$ 和 z 构成的平面为 yOz 平面。若建立新的坐标系 $O-x'y'z'$，使 z' 与 $\boldsymbol{k}_0$ 重合，x' 与 x 重合，则 y' 在 yOz 平面内。这时，截面即为 $x'Oy'$ 面，其方程为

$$z'=0 \tag{2.4-8}$$

新旧坐标系的变换关系为

$$\begin{cases} x=x' \\ y=y'\cos\theta+z'\sin\theta \\ z=-y'\sin\theta+z'\cos\theta \end{cases} \tag{2.4-9}$$

将式(2.4-9)代入式(2.4-7)，并注意到式(2.4-8)，得到

$$\frac{x'^2}{n_o^2}+\frac{y'^2\cos^2\theta}{n_o^2}+\frac{y'^2\sin^2\theta}{n_e^2}=1 \tag{2.4-10}$$

经过整理，可以得到截线方程为

$$\frac{x'^2}{n_o^2}+\frac{y'^2}{n_e^2(\theta)}=1 \tag{2.4-11}$$

式中

$$n_e(\theta)=\frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta}} \tag{2.4-12}$$

通过式(2.4-11)可以看到，这个椭圆有一个半轴的长度为 n_o，方向为 x 轴方向。也就是说，如果 $\boldsymbol{k}_0$ 在 yOz 平面内，不论 $\boldsymbol{k}_0$ 的方向如何，它总有一个线偏振光的折射率不变(等于 n_o)，相应地，$\boldsymbol{D}$ 方向垂直于 $\boldsymbol{k}_0$ 与 z 构成的平面，这就是 o 光。对于椭圆的另一个半轴，其长度为 $n_e(\theta)$，且在 yOz 平面内。即相应于 $\boldsymbol{k}_0$ 的另一个线偏振光的 $\boldsymbol{D}$ 矢量在 $\boldsymbol{k}_0$ 与 z 构成的平面内，相应的折射率 $n_e(\theta)$ 随 $\boldsymbol{k}_0$ 的方向变化，这就是 e 光。

2. 两种特殊情况

(1) $\theta=0$时，$\boldsymbol{k}_0$与z轴重合，这时，$n_e(\theta)=n_o$，截线方程为

$$x^2+y^2=n_o^2 \tag{2.4-13}$$

这是一个半径为n_o的圆。可见，沿z轴方向传播的两个光波只有一种折射率为n_o，$\boldsymbol{D}$矢量的振动方向除与z轴垂直外，没有其他约束，即沿z轴方向传播的光波可以允许任意振动方向，因此，z轴就是单轴晶体的光轴。

(2) $\theta=\pi/2$时，$\boldsymbol{k}_0$与z轴垂直，这时，$n_e(\theta)=n_e$，截线方程为

$$\frac{x^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}=1 \tag{2.4-14}$$

由于折射率椭球是旋转椭球，x和y坐标轴可任意选取，椭球在xOz和yOz或其他包含z轴的平面内的截线是一个椭圆，它的两个半轴的长度分别为n_o和n_e。这表示当$\boldsymbol{k}_0$与光轴垂直时，可以允许有两个线偏振光波传播，一个光波的$\boldsymbol{D}$矢量垂直于$\boldsymbol{k}_0$和光轴方向，折射率为n_o，该光波为 o 光。另一个光波的$\boldsymbol{D}$矢量平行于光轴方向，折射率为n_e，该光波为 e 光。

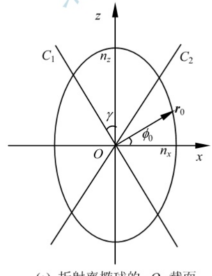

【双轴晶体的折射率椭球】

2.4.3 双轴晶体的折射率椭球

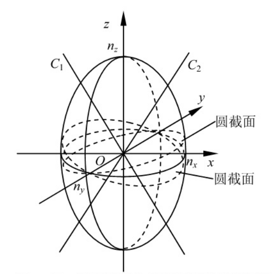
对于双轴晶体，$n_x\neq n_y\neq n_z$，所以式(2.4-5)就是双轴晶体的折射率椭球方程。习惯上常选择$n_x<n_y<n_z$，下面来研究折射率椭球的xOz截面，其方程为

$$\frac{x^2}{n_x^2}+\frac{z^2}{n_z^2}=1 \tag{2.4-15}$$

这是一个椭圆，如图 2.9(a)所示。



(a) 折射率椭球的 xOz 截面



(b) r_0 与 y 轴所决定的平面与椭球相截的截面

图 2.9 双轴晶体的折射率椭球的 xOz 截面与光轴



如果从中心 O 向椭圆引矢径 $\boldsymbol{r}$，易见 $\boldsymbol{r}$ 的长度随 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴的夹角 ϕ 而变：当 $\phi=0$ 时，$|r|=n_x$；当 $\phi=\pi/2$ 时，$|r|=n_z$。由于 $n_x<n_y<n_z$，所以必有一个矢径 $\boldsymbol{r}_0$，其长度为 $|r_0|=n_y$。这时，$\boldsymbol{r}_0$ 与 y 轴所决定的平面与椭球相截的截面是一个圆，如图 2.9(b)所示。因此，当光波的波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$ 垂直于圆截面时，只有一种折射率 $(n=n_y)$ 的光波，其 $\boldsymbol{D}$ 矢量在圆截面内振动，且方向不受限制。显然，晶体内与圆截面的法线方向对应的方向就是光轴方向。由折射率椭球的对称性可知，晶体内存在这样两个方向线 C_1 和 C_2，故把这种晶体称为双轴晶体。

由图 2.9(a)可知，晶体光轴 C_1 与 z 轴的夹角 γ 等于矢径 $\boldsymbol{r}_0$ 与 x 轴的夹角 ϕ_0。利用式(2.4-15)，可以得到

$$\frac{(n_y\cos\phi_0)^2}{n_x^2}+\frac{(n_y\sin\phi_0)^2}{n_z^2}=1 \tag{2.4-16}$$

因此可以得到

$$\tan\phi_0=\tan\gamma=\pm\frac{n_z}{n_x}\sqrt{\frac{n_y^2-n_x^2}{n_z^2-n_y^2}} \tag{2.4-17}$$

式中正负号表示光轴 C_1 和 C_2 对称地位于 z 轴的两侧。

利用双轴晶体的折射率椭球可以确定相应于 $\boldsymbol{k}$ 方向的两个折射率和振动方向，只是计算比单轴晶体复杂得多。对于双轴晶体不存在折射率与波矢方向无关的寻常光，两个不同偏振方向的折射率都与波矢方向有关，这可以理解为两个偏振光波都是非常光，因此不能再用 o 光和 e 光的名称来区别双轴晶体中的两个偏振光波。在双轴晶体中，波矢 $\boldsymbol{k}$ 相对于折射率椭球主轴的关系有以下 4 种情况。

(1) 当 $\boldsymbol{k}$ 方向沿着某一主轴方向时，如沿 x 轴方向，相应的两个线偏振光的折射率分别为 n_y 和 n_z，$\boldsymbol{D}$ 矢量的振动方向分别沿着 y 轴和 z 轴方向；沿 y 轴方向时，相应的两个线偏振光的折射率分别为 n_x 和 n_z，$\boldsymbol{D}$ 矢量的振动方向分别沿着 x 轴和 z 轴方向。

(2) 当 $\boldsymbol{k}$ 方向沿着光轴方向时，两个正交线偏振光的折射率都为 n_y，其 $\boldsymbol{D}$ 矢量的振动方向没有限制，此时将出现锥形折射。

(3) 当 $\boldsymbol{k}$ 在两个主轴构成的平面(如 xOz 面)内，但不包括(1)和(2)两种情况，相应的两个线偏振光的折射率不等，其中之一为 n_y，另一个介于 n_x 和 n_z 之间。

(4) 当 $\boldsymbol{k}$ 与折射率椭球的 3 个主轴既不平行也不垂直时，相应的两个线偏振光的折射率一个介于 n_x 和 n_y 之间，另一个介于 n_y 和 n_z 之间，下面来讨论这种情况。

假设双轴晶体中波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴的夹角为 θ，它在 x-y 面上投影与 x 轴的夹角为 φ，就可以得到折射率椭球与过原点且垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面的截线方程。首先将 xyz 坐标绕 z 轴旋转 φ 角，建立一个新坐标系 $x'y'z'$，使 x' 与 $\boldsymbol{k}$ 在 xOy 面的投影重合，坐标变换矩阵为

$$A_\varphi=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2.4-18}$$

然后，将 $x'y'z'$ 绕 y' 旋转 θ 角，建立第二个坐标系 $x''y''z''$，使 z'' 与 $\boldsymbol{k}$ 重合。坐标变换矩阵为

$$A_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{2.4-19}$$

因此，新旧坐标之间的变换关系为

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=A_\varphi^{-1}A_\theta^{-1}\begin{bmatrix}x''\\y''\\z''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x''\\y''\\z''\end{bmatrix} \tag{2.4-20}$$

写成分量形式，有

$$\begin{cases}x=x''\cos\theta\cos\varphi-y''\sin\varphi+z''\sin\theta\cos\varphi\\ y=x''\cos\theta\sin\varphi+y''\cos\varphi+z''\sin\theta\sin\varphi\\ z=-x''\sin\theta+z''\cos\theta\end{cases} \tag{2.4-21}$$

将上式代入双轴晶体的折射率椭球方程，并与 $z''=0$ 联立，可以得到用 $x''y''z''$ 描述的过原点且垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面与折射率椭球的截线方程为

$$\left(\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{n_x^2}+\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{n_y^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_z^2}\right)x''^2+\left(\frac{\sin^2\varphi}{n_x^2}+\frac{\cos^2\varphi}{n_y^2}\right)y''^2+$$
$$2\left(\frac{n_x^2-n_y^2}{n_x^2n_y^2}\right)\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi x''y''=1 \tag{2.4-22}$$

令

$$\begin{cases}A=\dfrac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{n_x^2}+\dfrac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{n_y^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{n_z^2}\\ B=2\dfrac{n_x^2-n_y^2}{n_x^2n_y^2}\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\\ C=\dfrac{\sin^2\varphi}{n_x^2}+\dfrac{\cos^2\varphi}{n_y^2}\end{cases} \tag{2.4-23}$$

则式(2.4-22)可以写为

$$Ax''^2+Bx''y''+Cy''^2=1 \tag{2.4-24}$$

式(2.4-24)包含交叉项，x''和y'' 不是椭圆的主轴，为了确定椭圆半轴的长短和方向，还要进行一次坐标旋转，将 $x''y''z''$ 坐标系绕 z'' 轴旋转 β 角，相应的坐标变换矩阵为

$$A_\beta=\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta & 0\\ -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2.4-25}$$

因此

$$\begin{cases}x''=x'''\cos\beta-y'''\sin\beta\\ y''=x'''\sin\beta+y'''\cos\beta\\ z''=z'''\end{cases} \tag{2.4-26}$$



将式(2.4-26)代入式(2.4-24)，得到

$$\begin{aligned}&(A\cos^2\beta + B\sin\beta\cos\beta + C\sin^2\beta)x'''^2 + (A\sin^2\beta - B\sin\beta\cos\beta + C\cos^2\beta)y'''^2 - \\ &(2A\sin\beta\cos\beta + B\sin^2\beta - B\cos^2\beta - 2C\sin\beta\cos\beta)x'''y''' = 1\end{aligned} \tag{2.4-27}$$

令交叉项系数等于零，则有

$$\begin{cases}\cot 2\beta = \dfrac{A-C}{B} \\ \cos 2\beta = \dfrac{\cot 2\beta}{\sqrt{1+\cot^2 2\beta}} = \dfrac{A-C}{\sqrt{B^2+(A-C)^2}} \\ \sin^2\beta = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\beta) = \dfrac{\sqrt{B^2+(A-C)^2}-(A-C)}{2\sqrt{B^2+(A-C)^2}} \\ \cos^2\beta = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\beta) = \dfrac{\sqrt{B^2+(A-C)^2}+(A-C)}{2\sqrt{B^2+(A-C)^2}}\end{cases} \tag{2.4-28}$$

将式(2.4-28)代入式(2.4-27)，可以得到

$$\frac{1}{2}\left[(A+C)+\sqrt{B^2+(A-C)^2}\right]x'''^2 + \frac{1}{2}\left[(A+C)-\sqrt{B^2+(A-C)^2}\right]y'''^2 = 1 \tag{2.4-29}$$

这是一个标准椭圆，x'''和y''' 是椭圆的主轴方向，其半轴长度分别为

$$\begin{cases}a = \left[\dfrac{1}{2}(A+C+\sqrt{B^2+(A-C)^2})\right]^{-1/2} \\ b = \left[\dfrac{1}{2}(A+C-\sqrt{B^2+(A-C)^2})\right]^{-1/2}\end{cases} \tag{2.4-30}$$

这样就求出了双轴晶体中，对于任意波矢方向 $\boldsymbol{k}$ 的两个偏振光波的振动方向 x'''和y''' 及其相应的折射率 $n_1 = a$，$n_2 = b$ 。

最后应当指出的是，在双轴晶体中，除了光轴 C_1 和 C_2 方向外，沿其余方向传播的平面光波，在折射率椭球中心所作的垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面与折射率椭球的截线都是椭圆。而且，由于双轴晶体折射率椭球没有旋转对称性，相应的两个线偏振光的折射率都与 $\boldsymbol{k}$ 的方向有关，因此这两个光都是非常光。

本节推导了晶体的折射率椭球，并对单轴晶体和双轴晶体的折射率椭球进行了讨论，本节要点见表 2-4。

表 2-4　晶体折射率椭球

晶体种类	折射率椭球	说　　明
单轴晶体	$\dfrac{x^2}{n_o^2}+\dfrac{y^2}{n_o^2}+\dfrac{z^2}{n_e^2}=1$	过折射率椭球中心只能作出一个圆截面，光轴方向与圆截面垂直
双轴晶体	$\dfrac{x^2}{n_x^2}+\dfrac{y^2}{n_y^2}+\dfrac{z^2}{n_z^2}=1$	过折射率椭球中心能作出两个圆截面，两个光轴方向分别与两个圆截面垂直

2.5 光在单轴晶体中的传播规律

通过求解波矢菲涅耳方程和光线菲涅耳方程可以得到波矢方向和光线方向所对应的两个线偏振光波的折射率或速度。本节将先解波矢菲涅耳方程得到 o 光和 e 光的折射率，进一步来确定 o 光和 e 光的振动方向，并计算 e 光的离散角。

2.5.1 波矢菲涅耳方程的解

对于单轴晶体$\varepsilon_x=\varepsilon_y\neq\varepsilon_z$，或者$\varepsilon_{rx}=\varepsilon_{ry}\neq\varepsilon_{rz}$，按照折射率与介电常数的关系$n=\sqrt{\varepsilon_r}$，可以定义 3 个主折射率：

$$n_x=\sqrt{\varepsilon_{rx}},\ n_y=\sqrt{\varepsilon_{ry}},\ n_z=\sqrt{\varepsilon_{rz}} \tag{2.5-1}$$

则$n_x=n_y=n_o$，$n_z=n_e$，因此，$n_o\neq n_e$。

因为单轴晶体的主轴 x 和 y 可以在垂直于 z 轴的平面上任意选取，因此，为讨论方便起见，取 $\boldsymbol{k}$ 在 yOz 平面内，并与 z 轴夹角为 θ，如图 2.10 所示，则

$$k_{0x}=0,\ k_{0y}=\sin\theta,\ k_{0z}=\cos\theta \tag{2.5-2}$$

将式(2.5-1)和式(2.5-2)代入式(2.3-6)，得到

$$\frac{0}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_o^2}}+\frac{\sin^2\theta}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_o^2}}+\frac{\cos^2\theta}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_e^2}}=0 \tag{2.5-3}$$

整理，可得

$$(n^2-n_o^2)\left[n^2(n_o^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta)-n_o^2n_e^2\right]=0 \tag{2.5-4}$$

该方程有两个解：

$$n_1^2=n_o^2 \tag{2.5-5}$$

$$n_2^2=\frac{n_o^2n_e^2}{n_o^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta} \tag{2.5-6}$$

这表示在单轴晶体中，对于给定的波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$，可以有两种不同折射率的光波。一种光波的折射率与波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$ 无关，恒等于 n_o，这个光波就是寻常光，即 o 光。另一种光波的折射率随着 $\boldsymbol{k}_0$ 与 z 轴夹角 θ 而变，这个光波就是非常光，即 e 光。由式(2.5-6)可以看出，当 $\theta=90^\circ$ 时，$n_2=n_e$；而当 $\theta=0^\circ$ 时，$n_2=n_o$，也就是说，当光波沿 z 轴方向传播时，只存在一种折射率的两个光波，光波在这个方向传播时 o 光和 e 光完全重合，因此，对于单轴晶体，z 轴方向就是光轴方向。

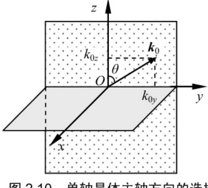


图 2.10 单轴晶体主轴方向的选择



2.5.2　o 光和 e 光的振动方向

由于 $D_i = \varepsilon_0\varepsilon_{ri}E_i$，$n_i^2 = \varepsilon_{ri}$，因此可将式(2.3-4)改写为

$$E_i = \frac{n^2 k_{0i}(\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{E})}{n^2 - n_i^2} \tag{2.5-7}$$

对于 o 光，将 $n = n_1 = n_o$ 和 $k_{0x} = 0$，$k_{0y} = \sin\theta$，$k_{0z} = \cos\theta$ 代入式(2.5-7)，可得

$$\begin{cases}(n_o^2 - n_o^2)E_x = 0 \\ (n_o^2 - n_o^2\cos^2\theta)E_y + n_o^2\sin\theta\cos\theta E_z = 0 \\ n_o^2\sin\theta\cos\theta E_y + (n_e^2 - n_o^2\sin^2\theta)E_z = 0\end{cases} \tag{2.5-8}$$

第一式系数为零，因此，为了使 $\boldsymbol{E}$ 有非零解，只有 $E_x \neq 0$，第二式和第三式的系数行列式不为零，所以 $E_y = E_z = 0$，对于 $\boldsymbol{D}$ 矢量，有 $D_y = D_z = 0$，$D_x = \varepsilon_0\varepsilon_{xr}E_x \neq 0$。这表示对于 o 光波，$\boldsymbol{D}$ 矢量平行于 $\boldsymbol{E}$ 矢量，两者同时垂直于 yOz 平面，即波矢(或光线)与光轴组成的平面。可见，o 光波的 $\boldsymbol{D}$ 的矢量和 $\boldsymbol{E}$ 矢量方向一致，因此，o 光的波矢方向与光线方向也一致。

对于 e 光，将 $n = n_2$ 和 $k_{0x} = 0$，$k_{0y} = \sin\theta$，$k_{0z} = \cos\theta$ 代入式(2.5-7)，可得

$$\begin{cases}(n_o^2 - n_2^2)E_x = 0 \\ (n_o^2 - n_2^2\cos^2\theta)E_y + n_2^2\sin\theta\cos\theta E_z = 0 \\ n_2^2\sin\theta\cos\theta E_y + (n_e^2 - n_2^2\sin^2\theta)E_z = 0\end{cases} \tag{2.5-9}$$

第一式系数不为零，因此 $E_x = 0$，即 $D_x = 0$；第二式和第三式的系数行列式为零，所以 E_y 和 E_z 都不等于零，这说明对于 e 光波，$\boldsymbol{D}$ 矢量或 $\boldsymbol{E}$ 矢量都在 yOz 平面内，它们与 o 光波的 $\boldsymbol{D}$ 矢量或 $\boldsymbol{E}$ 矢量垂直，如图 2.11 所示。

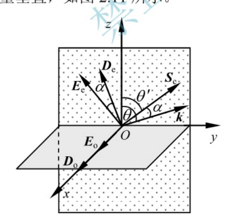


图 2.11　单轴晶体内 o 光和 e 光的矢量方向

对于 e 光，$\boldsymbol{E}$ 矢量在 yOz 平面内的具体指向，可通过求式(2.5-9)中的第二式或第三式中的 E_z 与 E_y 之比来确定。把式(2.5-6)代入式(2.5-9)中的第二式，可得到

$$\frac{E_z}{E_y} = -\frac{n_o^2\sin\theta}{n_e^2\cos\theta} \tag{2.5-10}$$

并且

$$\frac{D_z}{D_y}=\frac{\varepsilon_{rz}E_z}{\varepsilon_{ry}E_y}=-\frac{n_e^2n_o^2\sin\theta}{n_o^2n_e^2\cos\theta}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{2.5-11}$$

由式(2.5-10)和式(2.5-11)可见，e 光波的 $\boldsymbol{D}$ 矢量和 $\boldsymbol{E}$ 矢量一般不一致，因此，e 光的波矢方向与光线方向一般也不一致。

2.5.3 e 光的离散角

晶体光学中把波矢方向与光线方向的夹角称为离散角(即图 2.11 中的 α)。在实际中，如果已知波矢方向，通过求离散角就可以确定相应的光线方向。对于单轴晶体，o 光的离散角恒等于零。而 e 光的离散角 $\alpha=\theta-\theta'$ ，其中， θ 是 e 光波矢与光轴的夹角， θ' 是 e 光光线与光轴的夹角：

$$\tan\theta'=\frac{S_{ey}}{S_{ez}}=-\frac{E_z}{E_y} \tag{2.5-12}$$

利用式(2.5-10)，可以得到

$$\tan\theta'=\frac{n_o^2\sin\theta}{n_e^2\cos\theta}=\frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\theta \tag{2.5-13}$$

所以

$$\tan\alpha=\tan\left(\theta-\theta'\right)=\frac{\tan\theta-\tan\theta'}{1+\tan\theta\tan\theta'}=\left(1-\frac{n_o^2}{n_e^2}\right)\frac{\tan\theta}{1+\dfrac{n_o^2}{n_e^2}\tan^2\theta} \tag{2.5-14}$$

可以证明，当 $\tan\theta=n_e/n_o$ 时，e 光有最大离散角为

$$\tan\alpha_M=\frac{n_e^2-n_o^2}{2n_on_e} \tag{2.5-15}$$

由式(2.5-15)可见，对于正单轴晶体， $n_e>n_o$ ，离散角 $\alpha=\theta-\theta'$ 为正，即 $\theta>\theta'$ ，所以 e 光光线较其波矢近离光轴。对于负单轴晶体， $n_e<n_o$ ，离散角 $\alpha=\theta-\theta'$ 为负，即 $\theta<\theta'$ ，所以 e 光光线较其波矢远离光轴。

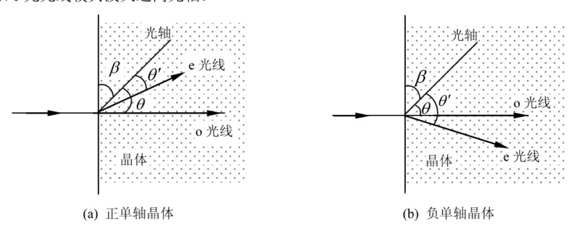


图 2.12　正入射条件下 o 光和 e 光的方向

在实际应用中，经常要求晶体元件工作在离散角最大的情况下，同时满足正入射条件，



如图 2.12 所示，使通光面(晶体表面)与光轴的夹角为 $\beta = 90° - \theta$，则

$$\tan\beta = \frac{n_o}{n_e} \tag{2.5-16}$$

本节通过解波矢菲涅耳方程得到了 o 光和 e 光的折射率；确定了 o 光和 e 光的振动方向；给出了求 e 光离散角的表达式。本节要点见表 2-5。

表 2-5　光在单轴晶体中的传播规律

项　　目	正单轴	负单轴	e 光折射率	e 光离散角
表达式	$n_e > n_o$	$n_e < n_o$	$n_e(\theta) = \dfrac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2\theta + n_e^2 \cos^2\theta}}$	$\tan\alpha = \left(1 - \dfrac{n_o^2}{n_e^2}\right)\dfrac{\tan\theta}{1 + \dfrac{n_o^2}{n_e^2}\tan^2\theta}$

2.6　波矢折射率曲面方程与光线折射率曲面方程

折射率椭球可以确定与波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$ 相应的两个线偏振光的折射率，但它需要通过一定的作图过程才能得到，而折射率曲面可以更直接地表示出 $\boldsymbol{k}_0$ 或 $\boldsymbol{s}_0$ 相应的两个线偏振光的折射率。波矢折射率曲面是矢径 $\boldsymbol{r} = n\boldsymbol{k}_0$ 所构成的曲面，而光线折射率曲面是矢径 $\boldsymbol{r} = n_s\boldsymbol{s}_0$ 构成的曲面。本节将推导波矢折射率曲面方程和光线折射率曲面方程，并阐述激光倍频的原理。

2.6.1　波矢折射率曲面方程

波矢折射率曲面上的矢径为 $\boldsymbol{r} = n\boldsymbol{k}_0$，其方向平行于给定的波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$，长度等于与 $\boldsymbol{k}_0$ 相应的两个光波的折射率，因此，折射率曲面必定是一个双壳层曲面，记作 $(\boldsymbol{k}_0, n)$ 曲面。把矢径长度

$$|r| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = n \tag{2.6-1}$$

和矢径分量关系

$$x = k_x = nk_{0x}，\quad y = k_y = nk_{0y}，\quad z = k_z = nk_{0z} \tag{2.6-2}$$

代入式(2.3-6)(即波矢菲涅耳方程)，可以得到

$$\frac{n_x^2 x^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{n_y^2 y^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{n_z^2 z^2}{n^2 - n_z^2} = 0 \tag{2.6-3}$$

经过整理，可以得到

$$\begin{aligned}&(n_x^2 x^2 + n_y^2 y^2 + n_z^2 z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + n_x^2 n_y^2 n_z^2 - \\ &\left[(n_y^2 + n_z^2)n_x^2 x^2 + (n_z^2 + n_x^2)n_y^2 y^2 + (n_x^2 + n_y^2)n_z^2 z^2\right] = 0\end{aligned} \tag{2.6-4}$$

式(2.6-4)就是波矢折射率曲面方程。它是一个 4 次曲面方程，利用这个方程可以很直观地得到与 $\boldsymbol{k}_0$ 相应的两个光波的折射率。

1. 单轴晶体的波矢折射率曲面方程

对于单轴晶体，将 $n_x = n_y = n_o$ 和 $n_z = n_e$ 代入式(2.6-4)，可以得到

$$(x^2+y^2+z^2-n_o^2)\cdot\left[n_o^2(x^2+y^2)+n_e^2z^2-n_o^2n_e^2\right]=0 \tag{2.6-5}$$

因此

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=n_o^2 \\ \dfrac{x^2+y^2}{n_e^2}+\dfrac{z^2}{n_o^2}=1 \end{cases} \tag{2.6-6}$$



【单轴晶体的波矢折射率曲面】

可见，单轴晶体的波矢折射率曲面是一个双层曲面，它是由一个半径为 n_o 的球面和一个以 z 轴为旋转轴的旋转椭球构成的。球面对应于 o 光的折射率曲面，旋转椭球对应于 e 光的折射率曲面。单轴晶体的波矢折射率曲面在主轴截面上的截线和立体图如图 2.13 所示。

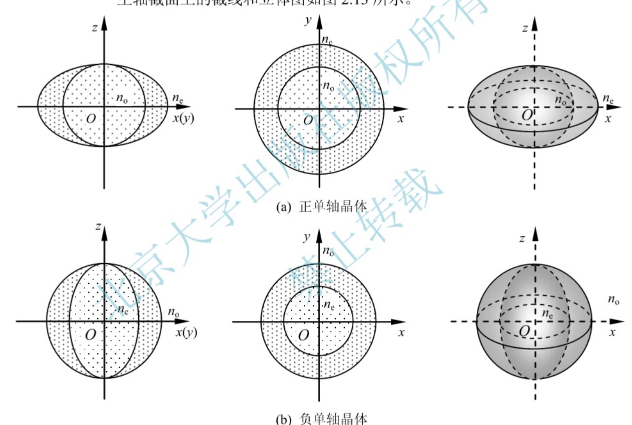


图 2.13 单轴晶体波矢折射率曲面

对于正单轴晶体，$n_e > n_o$，球面内切于椭球；对于负单轴晶体，$n_e < n_o$，球面外切于椭球。两种情况的切点都在 z 轴上。当与 z 轴夹角为 θ 的波矢 $\boldsymbol{k}_0$ 与折射率曲面相交时，得到长度为 n_o 和 $n_e(\theta)$ 的矢径，它们分别对应于 $\boldsymbol{k}_0$ 方向的两个线偏振光的折射率，其中 $n_e(\theta)$ 可由式(2.5-6)求出。

2. 双轴晶体的波矢折射率曲面方程

对于双轴晶体，$n_x \neq n_y \neq n_z$，式(2.6-4)所表示的波矢折射率曲面方程与 3 个主轴截面上的截线都是一个圆加上一个同心椭圆。例如，在 xOy 面上，由式(2.6-4)可得

$$(n_x^2x^2+n_y^2y^2)(x^2+y^2)+n_x^2n_y^2n_z^2-\left[(n_y^2+n_z^2)n_x^2x^2+(n_z^2+n_x^2)n_y^2y^2\right]=0 \tag{2.6-7}$$

经过整理可以得到

$$(x^2+y^2-n_z^2)(n_x^2x^2+n_y^2y^2-n_x^2n_y^2)=0 \tag{2.6-8}$$

或者

$$\begin{cases} x^2+y^2=n_z^2 \\ \dfrac{x^2}{n_y^2}+\dfrac{y^2}{n_x^2}=1 \end{cases} \tag{2.6-9}$$

同样，在 xOz 面和 yOz 面上可以得到

$$\begin{cases} x^2+z^2=n_y^2 \\ \dfrac{x^2}{n_z^2}+\dfrac{z^2}{n_x^2}=1 \end{cases} \tag{2.6-10}$$

$$\begin{cases} y^2+z^2=n_x^2 \\ \dfrac{y^2}{n_z^2}+\dfrac{z^2}{n_y^2}=1 \end{cases} \tag{2.6-11}$$

按照假设，$n_x<n_y<n_z$，则 3 个主轴截面上的截线如图 2.14 所示。折射率曲面的两个壳层仅有 4 个交点，通过中心 O 的两对交点的连线方向就是双轴晶体的光轴方向。双轴晶体的波矢折射率曲面立体图如图 2.15 所示。

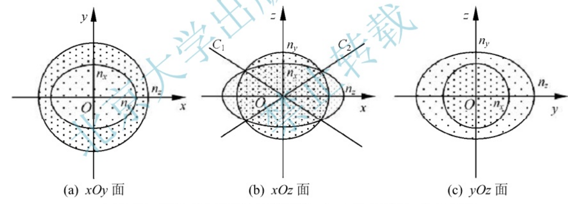
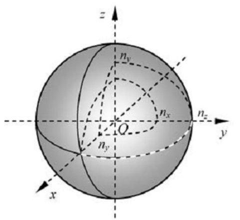


图 2.14　双轴晶体的波矢折射率曲面在 3 个主轴截面上的截线





【双轴晶体的波矢折射率曲面立体图】

图 2.15　双轴晶体的波矢折射率曲面立体图

2.6.2　光线折射率曲面方程

光线折射率曲面上的矢径为 $\boldsymbol{r}=n_s\boldsymbol{s}_0$，其方向平行于给定的光线方向 $\boldsymbol{s}_0$，长度等于与 $\boldsymbol{s}_0$ 相应的两个光波的折射率，因此，折射率曲面必定是一个双壳层曲面，记作 $(\boldsymbol{s}_0,n_s)$ 曲面。把矢径长度

$$|r|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=n_s \tag{2.6-12}$$

和矢径分量关系

$$x=n_s s_{0x}\,,\quad y=n_s s_{0y}\,,\quad z=n_s s_{0z} \tag{2.6-13}$$

代入式(2.3-12)(即光线菲涅耳方程)，可以得到

$$\frac{x^2}{n_s^2-n_x^2}+\frac{y^2}{n_s^2-n_y^2}+\frac{z^2}{n_s^2-n_z^2}=0 \tag{2.6-14}$$

或者

$$x^2(n_s^2-n_y^2)(n_s^2-n_z^2)+y^2(n_s^2-n_x^2)(n_s^2-n_z^2)+z^2(n_s^2-n_x^2)(n_s^2-n_y^2)=0 \tag{2.6-15}$$

式(2.6-15)为光线折射率曲面方程。

1. 单轴晶体的光线折射率曲面方程

对于单轴晶体，将 $n_x=n_y=n_o$ 和 $n_z=n_e$ 代入式(2.6-15)，可以得到

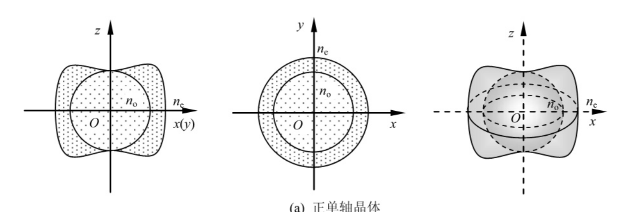
$$(n_s^2-n_o^2)\left[(x^2+y^2)n_e^2+z^2n_o^2-n_s^4\right]=0 \tag{2.6-16}$$

利用式(2.6-12)，可以得到

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=n_o^2\\[4pt] \dfrac{x^2+y^2}{n_o^2}+\dfrac{z^2}{n_e^2}=\dfrac{n_s^4}{n_o^2n_e^2}\end{cases} \tag{2.6-17}$$

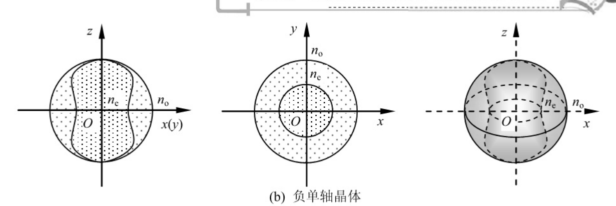

【单轴晶体的光线折射率曲面】

由此可见，单轴晶体的光线折射率曲面是一个双层曲面，它是由一个半径为 n_o 的球面和一个以 z 轴为旋转轴的旋转卵形构成的。球面对应于 o 光的折射率曲面，旋转卵形对应于 e 光的折射率曲面。单轴晶体的光线折射率曲面在主轴截面上的截线图和立体图如图 2.16 所示。



(a) 正单轴晶体

图 2.16　单轴晶体的光线折射率曲面



(b) 负单轴晶体

图 2.16　单轴晶体的光线折射率曲面(续)

2. 双轴晶体的光线折射率曲面方程

对于双轴晶体，$n_x \neq n_y \neq n_z$，折射率曲面和 3 个坐标面的交线都由一个圆和一个卵形线组成，例如，在 xOy 面上，由式(2.6-15)可得

$$x^2(n_s^2-n_y^2)(n_s^2-n_z^2)+y^2(n_s^2-n_x^2)(n_s^2-n_z^2)=0 \tag{2.6-18}$$

经过整理，可以得到

$$(x^2+y^2-n_z^2)(x^2n_y^2+y^2n_x^2-n_s^4)=0 \tag{2.6-19}$$

或者

$$\begin{cases} x^2+y^2=n_z^2 \\ \dfrac{x^2}{n_x^2}+\dfrac{y^2}{n_y^2}=\dfrac{n_s^4}{n_x^2n_y^2} \end{cases} \tag{2.6-20}$$

同样，在 xOz 面和 yOz 面上可以得到

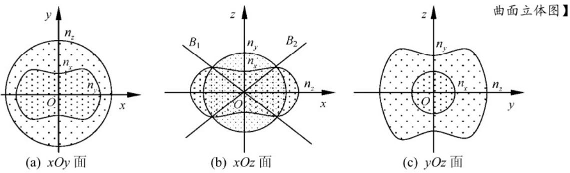
$$\begin{cases} x^2+z^2=n_y^2 \\ \dfrac{x^2}{n_x^2}+\dfrac{z^2}{n_z^2}=\dfrac{n_s^4}{n_x^2n_z^2} \end{cases} \tag{2.6-21}$$

$$\begin{cases} y^2+z^2=n_x^2 \\ \dfrac{y^2}{n_y^2}+\dfrac{z^2}{n_z^2}=\dfrac{n_s^4}{n_y^2n_z^2} \end{cases} \tag{2.6-22}$$

按照假设，$n_x < n_y < n_z$，则 3 个主轴截面上的截线图 2.17 所示。折射率曲面的两个壳层仅有 4 个交点，通过中心 O 的两对交点的连线方向称为双轴晶体的光线轴。双轴晶体折射率曲面立体图如图 2.18 所示。



【双轴晶体折射率曲面立体图】



(a) xOy 面　(b) xOz 面　(c) yOz 面

图 2.17　双轴晶体的光线折射率曲面在 3 个主轴截面上的截线



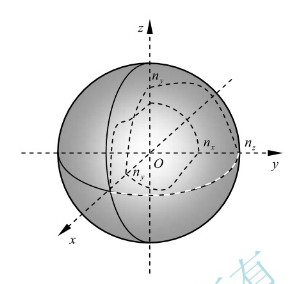




图 2.18　双轴晶体的光线折射率曲面立体图

【激光倍频】

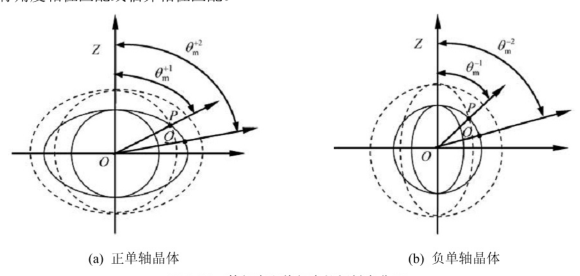
2.6.3　相位匹配与激光倍频

对于一般光学介质而言，其折射率随着频率而变。在透明区，频率高的光波折射率总是较高，即 $n_{2\nu} > n_{\nu}$，从图 2.19 中可以清楚地看出来。图中虚线为倍频光的折射率曲面，实线为基频光的折射率曲面。由图可见，基频光的折射率曲面和倍频光的折射率曲面有 4 个交点，若交点 P 对应的方向与光轴 Oz 方向的夹角为 θ_{m}，恰好也是入射到晶体的基频光波矢方向与光轴方向的夹角，就有

$$n_{\mathrm{e1}}(\theta_{\mathrm{m}}^{+1}) = n_{\mathrm{o2}} \tag{2.6-23}$$

$$n_{\mathrm{o1}} = n_{\mathrm{e2}}(\theta_{\mathrm{m}}^{-1}) \tag{2.6-24}$$

式中，θ_{m}^{+1} 和 θ_{m}^{-1} 称为正单轴晶体和负单轴晶体第 Ⅰ 类相位匹配角；n_{o1}、n_{e1} 和 n_{o2}、n_{e2} 分别是基频光和倍频光的 o 光、e 光折射率。因为这种匹配是通过选择特定的角度实现的，故又称角度相位匹配或临界相位匹配。



(a) 正单轴晶体　　　　(b) 负单轴晶体

图 2.19　基频光和倍频光的折射率曲面



按照入射基频光波的偏振态，可以将角度匹配方式分为两类：一类是入射的基频光取单一的线偏振光(如 o 光)，而倍频光为另一种线偏振光(如 e 光)。这种情况通常称为第Ⅰ类相位匹配，对应于图中的 P 点。例如，上面所分析的正单轴晶体和负单轴晶体，其相位匹配条件分别为式(2.6-23)和式(2.6-24)，它们表示波矢方向与光轴成 θ_m^{+1} 或 θ_m^{-1} 角。频率为 ν 的 e(o)光，通过与晶体的相互作用，产生的波矢仍在 θ_m^{+1} 或 θ_m^{-1} 方向，但频率变为 2ν 的 o(e)光。这一倍频过程用符号 $e+e\to o$ 和 $o+o\to e$ 表示；另一类是入射的基频光取两种偏振态(o 光和 e 光)，而倍频光为单一的偏振态，这种情况通常称为第Ⅱ类相位匹配，对应于图中的 Q 点。对于正单轴晶体和负单轴晶体，其第Ⅱ类相位匹配条件分别为

$$\left[n_{o1}+n_{e1}(\theta_m^{+2})\right]/2=n_{o2} \tag{2.6-25}$$

$$\left[n_{o1}+n_{e1}(\theta_m^{-2})\right]/2=n_{e2}(\theta_m^{-2}) \tag{2.6-26}$$

式中，θ_m^{+2} 和 θ_m^{-2} 是正单轴晶体和负单轴晶体第Ⅱ类相位匹配角。单轴晶体的两类相位匹配条件见表 2-6。

表 2-6　单轴晶体的两类相位匹配条件

晶体种类	第Ⅰ类相位匹配		第Ⅱ类相位匹配	
	偏振性质	相位匹配条件	偏振性质	相位匹配条件
正单轴晶体	$e+e\to o$	$n_{e1}(\theta_m^{+1})=n_{o2}$	$o+e\to o$	$\left[n_{o1}+n_{e1}(\theta_m^{+2})\right]/2=n_{o2}$
负单轴晶体	$o+o\to e$	$n_{o1}=n_{e2}(\theta_m^{-1})$	$e+o\to e$	$\left[n_{o1}+n_{e1}(\theta_m^{-2})\right]/2=n_{e2}(\theta_m^{-2})$

由式(2.5-6)，并根据相位匹配条件就可以得到第Ⅰ类和第Ⅱ类相位匹配的相位匹配角满足

$$\sin^2\theta_m^{+1}=\frac{n_{e1}^2(n_{o1}^2-n_{o2}^2)}{n_{o2}^2(n_{o1}^2-n_{e1}^2)} \tag{2.6-27}$$

$$\sin^2\theta_m^{-1}=\frac{n_{e2}^2(n_{o2}^2-n_{o1}^2)}{n_{o1}^2(n_{o2}^2-n_{e2}^2)} \tag{2.6-28}$$

$$\sin^2\theta_m^{+2}=\frac{\left[n_{o1}n_{e1}/(2n_{o2}-n_{o1})\right]^2-1}{n_{o1}^2-n_{e1}^2} \tag{2.6-29}$$

$$\sin^2\theta_m^{-2}=\frac{\left\{n_{o1}n_{e1}/\left[2n_{e2}(\theta_m^{-2})-n_{o1}\right]\right\}^2-1}{n_{o1}^2-n_{e1}^2} \tag{2.6-30}$$

本节推导了波矢折射率曲面方程和光线折射率曲面方程，并说明了激光倍频的原理，要点见表 2-7。

表 2-7　波矢折射率曲面方程和光线折射率曲面方程

方程＼晶体	单轴晶体	双轴晶体		
波矢折射率曲面方程	$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=n_o^2\\ \dfrac{x^2+y^2}{n_e^2}+\dfrac{z^2}{n_o^2}=1\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+y^2=n_z^2\\ \dfrac{x^2}{n_y^2}+\dfrac{y^2}{n_x^2}=1\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+z^2=n_y^2\\ \dfrac{x^2}{n_z^2}+\dfrac{z^2}{n_x^2}=1\end{cases}$	$\begin{cases}y^2+z^2=n_x^2\\ \dfrac{y^2}{n_z^2}+\dfrac{z^2}{n_y^2}=1\end{cases}$

（续表）

方程 \ 晶体	单轴晶体	双轴晶体		
光线折射率曲面方程	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=n_o^2 \\ \dfrac{x^2+y^2}{n_o^2}+\dfrac{z^2}{n_e^2}=\dfrac{n_s^4}{n_o^2 n_e^2} \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=n_z^2 \\ \dfrac{x^2}{n_x^2}+\dfrac{y^2}{n_y^2}=\dfrac{n_s^4}{n_x^2 n_y^2} \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+z^2=n_y^2 \\ \dfrac{x^2}{n_x^2}+\dfrac{z^2}{n_z^2}=\dfrac{n_s^4}{n_x^2 n_z^2} \end{cases}$	$\begin{cases} y^2+z^2=n_x^2 \\ \dfrac{y^2}{n_y^2}+\dfrac{z^2}{n_z^2}=\dfrac{n_s^4}{n_y^2 n_z^2} \end{cases}$

2.7 波矢曲面方程与光线曲面方程

波矢曲面是矢径 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}$ 构成的曲面，亦即 $\boldsymbol{r}=|k|\boldsymbol{k}_0=(\omega n/c)\boldsymbol{k}_0$ 构成的曲面，它反映了波矢量在晶体内形成的曲面。光线曲面是矢径 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{S}$ 构成的曲面，亦即 $\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{S}|\boldsymbol{s}_0=\upsilon_s\varepsilon_s E^2\boldsymbol{s}_0=cn_s E^2\boldsymbol{s}_0$ 构成的曲面，它反映了光线矢量在晶体内形成的曲面。本节将推导波矢曲面方程和光线曲面方程。

2.7.1 波矢曲面方程

矢径 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}$ 方向平行于给定的波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$，由于对应一个 $\boldsymbol{k}_0$ 有两个光波，这样，矢径长度等于相应的两个光波的波数。因此，波矢曲面也是一个双壳层曲面，记作 $(\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k})$ 曲面。把矢径长度

$$|r|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=\frac{\omega n}{c} \tag{2.7-1}$$

和矢径分量关系

$$x=k_x=\frac{\omega n}{c}k_{0x},\quad y=k_y=\frac{\omega n}{c}k_{0y},\quad z=k_z=\frac{\omega n}{c}k_{0z} \tag{2.7-2}$$

代入式(2.3-6)(即波矢菲涅耳方程)，可以得到

$$\frac{n_x^2 n^2 k_{0x}^2}{n_x^2-n^2}+\frac{n_y^2 n^2 k_{0y}^2}{n_y^2-n^2}+\frac{n_z^2 n^2 k_{0z}^2}{n_z^2-n^2}=0 \tag{2.7-3}$$

式(2.7-3)上下同乘 $(\omega/c)^2$，并利用式(2.7-2)，可以得到

$$\frac{n_x^2 x^2}{n_x'^2-n'^2}+\frac{n_y^2 y^2}{n_y'^2-n'^2}+\frac{n_z^2 z^2}{n_z'^2-n'^2}=0 \tag{2.7-4}$$

式中，$n_i'=(\omega/c)n_i(i=x,\quad y,\quad z)$，$n'=(\omega/c)n$。把式(2.7-4)两边同乘 $(\omega/c)^2$，得到

$$\frac{n_x'^2 x^2}{n_x'^2-n'^2}+\frac{n_y'^2 y^2}{n_y'^2-n'^2}+\frac{n_z'^2 z^2}{n_z'^2-n'^2}=0 \tag{2.7-5}$$

整理，可以得到

$$\begin{aligned}&(n_x'^2x^2+n_y'^2y^2+n_z'^2z^2)(x^2+y^2+z^2)+n_x'^2n_y'^2n_z'^2-\\&\left[(n_y'^2+n_z'^2)n_x'^2x^2+(n_z'^2+n_x'^2)n_y'^2y^2+(n_x'^2+n_y'^2)n_z'^2z^2\right]=0\end{aligned} \tag{2.7-6}$$



式(2.7-6)就是波矢曲面方程。

1. 单轴晶体的波矢曲面方程

对于单轴晶体，$n_x = n_y = n_o$，$n_z = n_e$，代入式(2.7-6)，可以得到

$$\left(x^2+y^2+z^2-\frac{\omega^2}{c^2}n_o^2\right)\left[n_o^2(x^2+y^2)+n_e^2z^2-\frac{\omega^2}{c^2}n_o^2n_e^2\right]=0 \tag{2.7-7}$$

因此

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{\omega^2}{c^2}n_o^2 \\ \dfrac{x^2+y^2}{\left(\dfrac{\omega}{c}n_e\right)^2}+\dfrac{z^2}{\left(\dfrac{\omega}{c}n_o\right)^2}=1 \end{cases} \tag{2.7-8}$$

可见，单轴晶体的波矢曲面是一个双层曲面，它是由一个半径为$(\omega/c)n_o$的球面和一个以 z 轴为旋转轴的旋转椭球构成的。球面对应于 o 光的波矢曲面，旋转椭球对应于 e 光的波矢曲面。单轴晶体的波矢曲面在主轴截面上的截线和立体图类似于单轴晶体的波矢折射率曲面在主轴截面上的截线和立体图，如图 2.20 所示。



【单轴晶体的波矢曲面】

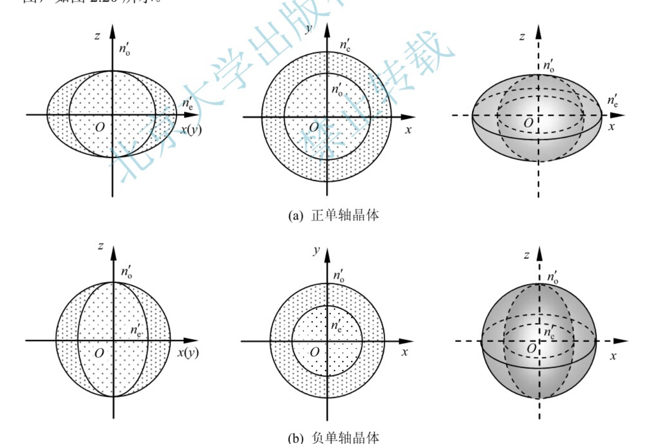


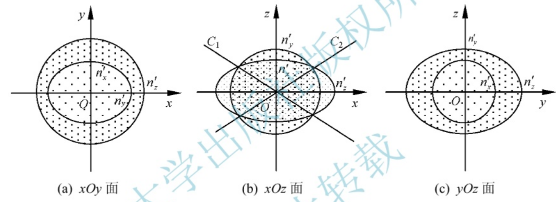
图 2.20　单轴晶体的波矢曲面

2. 双轴晶体的波矢曲面方程

对于双轴晶体，$n_x \neq n_y \neq n_z$，式(2.7-6)所表示的波矢曲面方程与 3 个主轴截面上的截线也是一个圆加上一个同心椭圆。它们在 xOy 面、xOz 面和 yOz 面上的方程分别为

$$\begin{cases} (x^2+y^2-n_z'^2)\left(\dfrac{x^2}{n_y'^2}+\dfrac{y^2}{n_x'^2}-1\right)=0 \\ (x^2+z^2-n_y'^2)\left(\dfrac{x^2}{n_z'^2}+\dfrac{z^2}{n_x'^2}-1\right)=0 \\ (y^2+z^2-n_x'^2)\left(\dfrac{y^2}{n_z'^2}+\dfrac{z^2}{n_y'^2}-1\right)=0 \end{cases} \tag{2.7-9}$$

双轴晶体的波矢曲面在主轴截面上的截线类似于双轴晶体的波矢折射率曲面在主轴截面上的截线，如图 2.21 所示。双轴晶体的波矢曲面立体图如图 2.22 所示。



(a) xOy 面　(b) xOz 面　(c) yOz 面

图 2.21　双轴晶体的波矢曲面在 3 个主轴截面上的截线

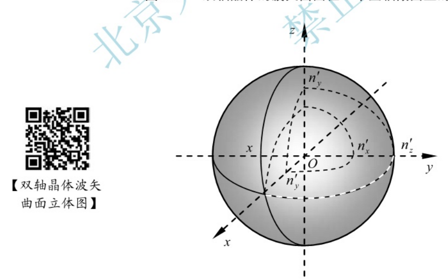


图 2.22　双轴晶体的波矢曲面立体图

对于单轴晶体，o 光的折射率和 e 光的折射率相差很小，见表 2-8。因此，单轴晶体的波矢折射率双层曲面和波矢双层曲面实际相差很小。



表 2-8　几种单轴晶体的折射率

方解石(负晶体)			KDP(负晶体)			石英(正晶体)		
波长/nm	n_o	n_e	波长/nm	n_o	n_e	波长/nm	n_o	n_e
656.3	1.6554	1.4846	1500	1.482	1.458	1946	1.52184	1.53004
589.3	1.6584	1.4864	1000	1.498	1.463	589.3	1.54424	1.55335
486.1	1.6679	1.4908	546.1	1.512	1.470	340	1.56747	1.57737
404.7	1.6864	1.4969	365.3	1.529	1.484	185	1.65751	1.68988

2.7.2　光线曲面方程

矢径 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{S}$ 方向平行于给定的光线方向 $\boldsymbol{s}_0$，由于对应一个 $\boldsymbol{s}_0$ 有两个光波，因此，光线曲面也是一个双壳层曲面，记作 $(\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{S})$ 曲面：

$$\boldsymbol{S}=\upsilon\varepsilon\boldsymbol{E}^2=(c\varepsilon_0E^2/\cos\alpha)n_{\mathrm{s}}$$

把矢径长度

$$|r|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=(c\varepsilon_0E^2/\cos\alpha)n_{\mathrm{s}} \tag{2.7-10}$$

和矢径分量关系

$$x=(c\varepsilon_0E^2/\cos\alpha)n_{\mathrm{s}}s_{0x},\quad y=(c\varepsilon_0E^2/\cos\alpha)n_{\mathrm{s}}s_{0y},\quad z=(c\varepsilon_0E^2/\cos\alpha)n_{\mathrm{s}}s_{0z} \tag{2.7-11}$$

代入式(2.3-12)(即光线菲涅耳方程)，可以得到

$$\left(\frac{1}{(c\varepsilon_0E^2/\cos\alpha)n_{\mathrm{s}}}\right)^2\left(\frac{x^2}{n_{\mathrm{s}}^2-n_x^2}+\frac{y^2}{n_{\mathrm{s}}^2-n_y^2}+\frac{z^2}{n_{\mathrm{s}}^2-n_z^2}\right)=0 \tag{2.7-12}$$

即

$$\frac{x^2}{n_{\mathrm{s}}'^2-n_x'^2}+\frac{y^2}{n_{\mathrm{s}}'^2-n_y'^2}+\frac{z^2}{n_{\mathrm{s}}'^2-n_z'^2}=0 \tag{2.7-13}$$

式中，$n_i'=(c\varepsilon_0E^2/\cos\alpha)n_{\mathrm{s}}n_i\,(i=\mathrm{s},x,y,z)$，式(2.7-13)还可以写为

$$x^2(n_{\mathrm{s}}'^2-n_y'^2)(n_{\mathrm{s}}'^2-n_z'^2)+y^2(n_{\mathrm{s}}'^2-n_x'^2)(n_{\mathrm{s}}'^2-n_z'^2)+z^2(n_{\mathrm{s}}'^2-n_x'^2)(n_{\mathrm{s}}'^2-n_y'^2)=0 \tag{2.7-14}$$

式(2.7-13)或式(2.7-14)就是光线曲面方程。

1. 单轴晶体的光线曲面方程

对于单轴晶体，将 $n_x=n_y=n_{\mathrm{o}}$ 和 $n_z=n_{\mathrm{e}}$ 代入式(2.7-14)，可以得到

$$(n_{\mathrm{s}}'^2-n_{\mathrm{o}}'^2)\left[(x^2+y^2)n_{\mathrm{e}}'^2+z^2n_{\mathrm{o}}'^2-n_{\mathrm{s}}'^4\right]=0 \tag{2.7-15}$$

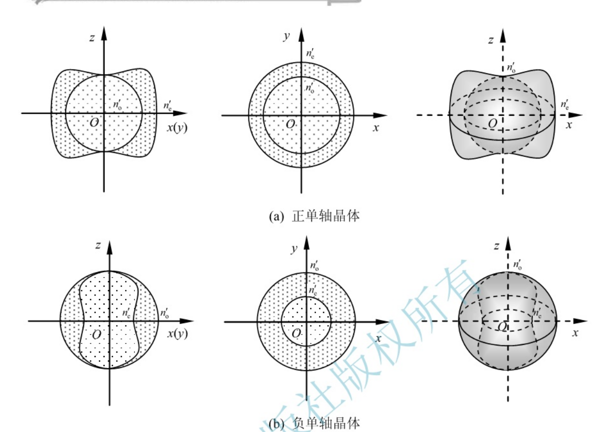
利用式(2.7-10)，可以得到

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=n_{\mathrm{o}}'^2\\ \dfrac{x^2+y^2}{n_{\mathrm{o}}'^2}+\dfrac{y^2}{n_{\mathrm{e}}'^2}=\dfrac{n_{\mathrm{s}}'^4}{n_{\mathrm{o}}'^2n_{\mathrm{e}}'^2}\end{cases} \tag{2.7-16}$$

可见，单轴晶体的光线曲面也是一个双层曲面，它是由一个半径为 n_{o}' 的球面和一个以 z 轴为旋转轴的旋转卵形构成的。球面对应于 o 光的折射率曲面，旋转卵形对应于 e 光的折射率曲面。单轴晶体的光线曲面在主轴截面上的截线和立体图如图 2.23 所示。



【单轴晶体的光线曲面】



(a) 正单轴晶体

(b) 负单轴晶体

图 2.23 单轴晶体的光线曲面

2. 双轴晶体的光线曲面方程

对于双轴晶体，$n_x \neq n_y \neq n_z$，光线曲面和 3 个坐标面的交线都由一个圆和一个卵形线组成，例如，在 xOy 面上，由式(2.7-14)可得

$$x^2(n_s'^2 - n_y'^2)(n_s'^2 - n_z'^2) + y^2(n_s'^2 - n_x'^2)(n_s'^2 - n_z'^2) = 0 \tag{2.7-17}$$

经过整理，可以得到

$$(x^2 + y^2 - n_z'^2)(x^2 n_y'^2 + y^2 n_x'^2 - n_s'^4) = 0 \tag{2.7-18}$$

或者

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = n_z'^2 \\ \dfrac{x^2}{n_x'^2} + \dfrac{y^2}{n_y'^2} = \dfrac{n_s'^4}{n_x'^2 n_y'^2} \end{cases} \tag{2.7-19}$$

同样，在 xOz 面和 yOz 面上可以得到

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = n_y'^2 \\ \dfrac{x^2}{n_x'^2} + \dfrac{z^2}{n_z'^2} = \dfrac{n_s'^4}{n_x'^2 n_z'^2} \end{cases} \tag{2.7-20}$$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = n_x'^2 \\ \dfrac{y^2}{n_y'^2} + \dfrac{z^2}{n_z'^2} = \dfrac{n_s'^4}{n_y'^2 n_z'^2} \end{cases} \tag{2.7-21}$$



按照假设，$n_x < n_y < n_z$，则 3 个主轴截面上的截线图如图 2.24 所示。光线曲面的两个壳层仅有 4 个交点，通过中心 O 的两对交点的连线方向就是双轴晶体的光线轴方向。双轴晶体的光线曲面立体图如图 2.25 所示。

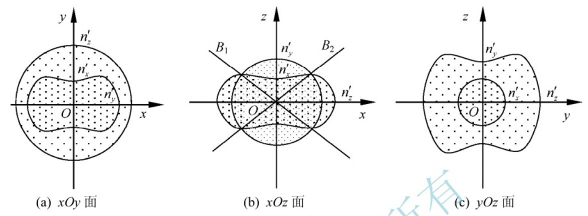
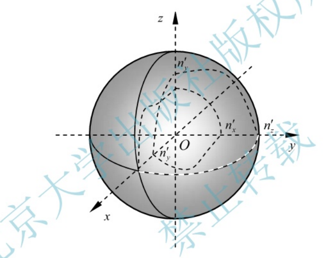


图 2.24　双轴晶体的光线曲面在 3 个主轴截面上的截线





【双轴晶体的光线曲面立体图】

图 2.25　双轴晶体的光线曲面立体图

本节推导了波矢曲面方程和光线曲面方程，要点见表 2-9。

表 2-9　波矢曲面方程和光线曲面方程

晶体 / 方程	单轴晶体	双轴晶体
波矢曲面方程	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=n_o'^2 \\ \dfrac{x^2+y^2}{n_e'^2}+\dfrac{z^2}{n_o'^2}=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=n_z'^2 \\ \dfrac{x^2}{n_y'^2}+\dfrac{y^2}{n_x'^2}=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+z^2=n_y'^2 \\ \dfrac{x^2}{n_z'^2}+\dfrac{z^2}{n_x'^2}=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2+z^2=n_x'^2 \\ \dfrac{y^2}{n_z'^2}+\dfrac{z^2}{n_y'^2}=1 \end{cases}$
光线曲面方程	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=n_o'^2 \\ \dfrac{x^2+y^2}{n_o'^2}+\dfrac{z^2}{n_e'^2}=\dfrac{n_s'^4}{n_o'^2 n_e'^2} \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=n_z'^2 \\ \dfrac{x^2}{n_x'^2}+\dfrac{y^2}{n_y'^2}=\dfrac{n_s'^4}{n_x'^2 n_y'^2} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+z^2=n_y'^2 \\ \dfrac{x^2}{n_x'^2}+\dfrac{z^2}{n_z'^2}=\dfrac{n_s'^4}{n_x'^2 n_z'^2} \end{cases}$ $\begin{cases} y^2+z^2=n_x'^2 \\ \dfrac{y^2}{n_y'^2}+\dfrac{z^2}{n_z'^2}=\dfrac{n_s'^4}{n_y'^2 n_z'^2} \end{cases}$

2.8 波矢速度面方程和光线速度面方程

波矢速度面是矢量 $\boldsymbol{r}=\upsilon_{\mathrm{p}}\boldsymbol{k}_0$ 所构成的曲面，它反映了相速度在晶体内形成的曲面。光线速度面是矢量 $\boldsymbol{r}=\upsilon_{\mathrm{s}}\boldsymbol{s}_0$ 构成的曲面，它反映了光线速度在晶体内形成的曲面。本节将推导波矢速度面方程和光线速度面方程。

2.8.1 波矢速度面方程

波矢速度面也称相速度面。从晶体中任一点 O 出发，引各个方向的法线速度矢量 $\boldsymbol{r}=\upsilon_{\mathrm{p}}\boldsymbol{k}_0$，其端点的轨迹就是波矢速度面。因此，波矢速度面是矢径方向平行于给定的波矢方向 $\boldsymbol{k}_0$，而矢径长度等于与 $\boldsymbol{k}_0$ 相应的两个光波的相速度 υ_{p}，因此，波矢速度面必定是一个双壳层曲面，记作($\boldsymbol{k}_0,\upsilon_{\mathrm{p}}$)曲面。

把矢径长度

$$|r|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=\upsilon_{\mathrm{p}} \tag{2.8-1}$$

和矢径分量关系

$$x=\upsilon_{\mathrm{p}}k_{0x},\quad y=\upsilon_{\mathrm{p}}k_{0y},\quad z=\upsilon_{\mathrm{p}}k_{0z} \tag{2.8-2}$$

代入式(2.3-7)(即波矢菲涅耳方程)，可以得到

$$\frac{x^2}{\upsilon_{\mathrm{p}}^2-\upsilon_x^2}+\frac{y^2}{\upsilon_{\mathrm{p}}^2-\upsilon_y^2}+\frac{z^2}{\upsilon_{\mathrm{p}}^2-\upsilon_z^2}=0 \tag{2.8-3}$$

或者

$$x^2(\upsilon_{\mathrm{p}}^2-\upsilon_y^2)(\upsilon_{\mathrm{p}}^2-\upsilon_z^2)+y^2(\upsilon_{\mathrm{p}}^2-\upsilon_x^2)(\upsilon_{\mathrm{p}}^2-\upsilon_z^2)+z^2(\upsilon_{\mathrm{p}}^2-\upsilon_x^2)(\upsilon_{\mathrm{p}}^2-\upsilon_y^2)=0 \tag{2.8-4}$$

式(2.8-3)或式(2.8-4)就是波矢速度面方程。

1. 单轴晶体波矢速度面方程

对于单轴晶体，有 $\upsilon_x=\upsilon_y=\upsilon_{\mathrm{o}}$，$\upsilon_z=\upsilon_{\mathrm{e}}$，代入式(2.8-4)，可以得到

$$(\upsilon_{\mathrm{p}}^2-\upsilon_{\mathrm{o}}^2)\left[(x^2+y^2)\upsilon_{\mathrm{e}}^2+z^2\upsilon_{\mathrm{o}}^2-\upsilon_{\mathrm{p}}^4\right]=0 \tag{2.8-5}$$

利用式(2.8-1)，可以得到

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\upsilon_{\mathrm{o}}^2 \\ \dfrac{x^2+y^2}{\upsilon_{\mathrm{o}}^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_{\mathrm{e}}^2}=\dfrac{\upsilon_{\mathrm{p}}^4}{\upsilon_{\mathrm{o}}^2\upsilon_{\mathrm{e}}^2} \end{cases} \tag{2.8-6}$$


【单轴晶体的波矢速度面】

可见，单轴晶体的波矢速度面是一个双层曲面，它是由一个半径为 υ_{o} 的球面和一个以 z 轴为旋转轴的旋转卵形构成的。球面对应于 o 光的波矢速度面，旋转卵形对应于 e 光的波矢速度面。单轴晶体的波矢速度面在主轴截面上的截线和立体图如图 2.26 所示。

2. 双轴晶体的波矢速度面方程

对于双轴晶体，$\upsilon_x\neq\upsilon_y\neq\upsilon_z$，波矢速度面和 3 个坐标面的交线都由一个圆和一个卵形



线组成，例如，在 xOy 面上，由式(2.8-3)可得

$$x^2(\upsilon_p^2-\upsilon_y^2)(\upsilon_p^2-\upsilon_z^2)+y^2(\upsilon_p^2-\upsilon_x^2)(\upsilon_p^2-\upsilon_z^2)=0 \tag{2.8-7}$$

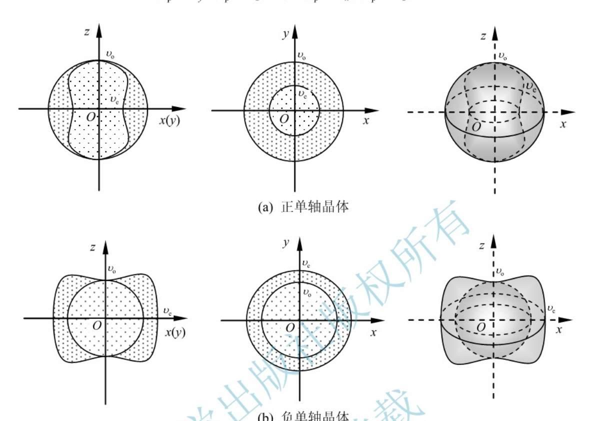


图 2.26　单轴晶体的波矢速度面

经过整理，可以得到

$$(x^2+y^2-\upsilon_z^2)(x^2\upsilon_y^2+y^2\upsilon_x^2-\upsilon_p^4)=0 \tag{2.8-8}$$

或者

$$\begin{cases} x^2+y^2=\upsilon_z^2 \\ \dfrac{x^2}{\upsilon_x^2}+\dfrac{y^2}{\upsilon_y^2}=\dfrac{\upsilon_p^4}{\upsilon_x^2\upsilon_y^2} \end{cases} \tag{2.8-9}$$

同样，在 xOz 面和 yOz 面上可以得到

$$\begin{cases} x^2+z^2=\upsilon_y^2 \\ \dfrac{x^2}{\upsilon_x^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_z^2}=\dfrac{\upsilon_p^4}{\upsilon_x^2\upsilon_z^2} \end{cases} \tag{2.8-10}$$

$$\begin{cases} y^2+z^2=\upsilon_x^2 \\ \dfrac{y^2}{\upsilon_y^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_z^2}=\dfrac{\upsilon_p^4}{\upsilon_y^2\upsilon_z^2} \end{cases} \tag{2.8-11}$$

按照假设，$n_x<n_y<n_z$，则 3 个主轴截面上的截线如图 2.27 所示。波矢速度面的两个壳层仅有 4 个交点，通过中心 O 的两对交点的连线 C_1 和 C_2 的方向就是双轴晶体的光轴方向。双轴晶体的波矢速度面立体图如图 2.28 所示。

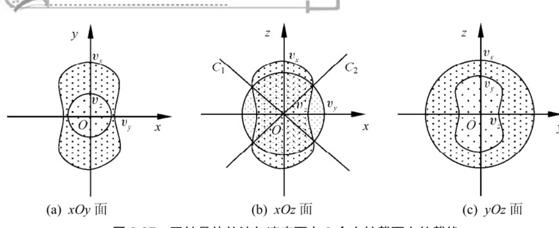


图 2.27　双轴晶体的波矢速度面在 3 个主轴截面上的截线



【双轴晶体波矢速度面立体图】

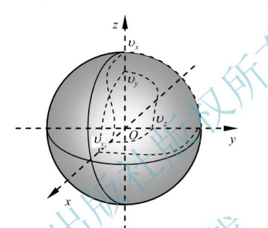


图 2.28　双轴晶体的波矢速度面立体图

2.8.2　光线速度面方程

从晶体中任一点 O 出发，引各个方向的光线速度矢量矢径 $\boldsymbol{r}=\upsilon_{\mathrm{s}}\boldsymbol{s}_0$ 构成的曲面就是光线速度面，其方向平行于给定的波矢方向 $\boldsymbol{s}_0$，由于对应一个 $\boldsymbol{s}_0$ 有两个光波，因此，光线速度面也是一个双壳层曲面，记作 $(\boldsymbol{s}_0,\upsilon_{\mathrm{s}})$ 曲面。

把矢径长度

$$|r|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=\upsilon_{\mathrm{s}} \tag{2.8-12}$$

和矢径分量关系

$$x=\upsilon_{\mathrm{s}}s_{0x}\,,\quad y=\upsilon_{\mathrm{s}}s_{0y}\,,\quad z=\upsilon_{\mathrm{s}}s_{0z} \tag{2.8-13}$$

代入式(2.3-13)(即光线菲涅耳方程)，可以得到

$$\frac{\upsilon_x^2x^2}{\upsilon_{\mathrm{s}}^2-\upsilon_x^2}+\frac{\upsilon_y^2y^2}{\upsilon_{\mathrm{s}}^2-\upsilon_y^2}+\frac{\upsilon_z^2z^2}{\upsilon_{\mathrm{s}}^2-\upsilon_z^2}=0 \tag{2.8-14}$$

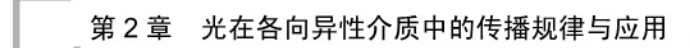
或者

$$x^2\upsilon_x^2(\upsilon_{\mathrm{s}}^2-\upsilon_y^2)(\upsilon_{\mathrm{s}}^2-\upsilon_z^2)+y^2\upsilon_y^2(\upsilon_{\mathrm{s}}^2-\upsilon_x^2)(\upsilon_{\mathrm{s}}^2-\upsilon_z^2)+z^2\upsilon_z^2(\upsilon_{\mathrm{s}}^2-\upsilon_x^2)(\upsilon_{\mathrm{s}}^2-\upsilon_y^2)=0 \tag{2.8-15}$$

式(2.8-14)或式(2.8-15)就是光线速度面方程。

1. 单轴晶体的光线速度面方程

对于单轴晶体，有 $\upsilon_x=\upsilon_y=\upsilon_{\mathrm{o}}$，$\upsilon_z=\upsilon_{\mathrm{e}}$，代入式(2.8-15)，可以得到





$$(\upsilon_s^2-\upsilon_o^2)\left[(x^2+y^2)\upsilon_o^2+z^2\upsilon_e^2-\upsilon_o^2\upsilon_e^2\right]=0 \tag{2.8-16}$$

利用式(2.8-12)可以得到

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\upsilon_o^2 \\ \dfrac{x^2+y^2}{\upsilon_e^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_o^2}=1 \end{cases} \tag{2.8-17}$$

可见，单轴晶体的光线速度面是一个双层曲面，它是由一个半径为 υ_o 的球面和一个以 z 轴为旋转轴的椭圆构成。球面对应于 o 光的速度面，椭圆对应于 e 光的速度面。单轴晶体的光线速度面在主轴截面上的截线图和立体图如图 2.29 所示。



【单轴晶体光线速度面】

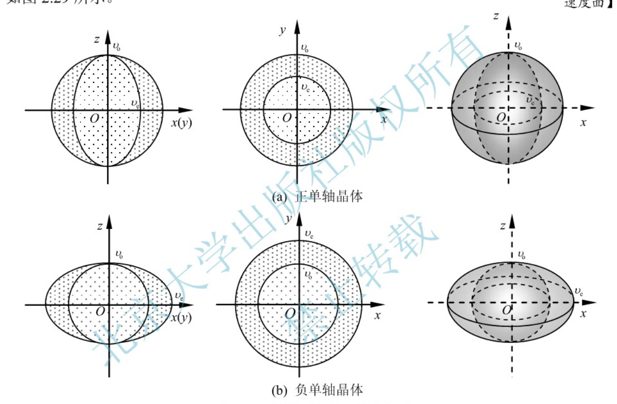


图 2.29　单轴晶体的光线速度面

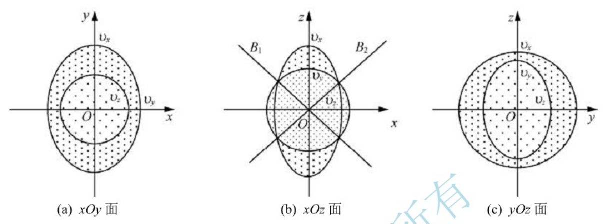
2. 双轴晶体的光线速度面方程

对于双轴晶体，$\upsilon_x \neq \upsilon_y \neq \upsilon_z$，式(2.8-15)所表示的光线速度面方程与 3 个主轴截面上的截线也是一个圆加上一个同心椭圆。它们在 xOy 面、xOz 面和 yOz 面上的方程分别为

$$\begin{cases} (x^2+y^2-\upsilon_z^2)\left(\dfrac{x^2}{\upsilon_y^2}+\dfrac{y^2}{\upsilon_x^2}-1\right)=0 \\ (x^2+z^2-\upsilon_y^2)\left(\dfrac{x^2}{\upsilon_z^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_x^2}-1\right)=0 \\ (y^2+z^2-\upsilon_x^2)\left(\dfrac{y^2}{\upsilon_z^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_y^2}-1\right)=0 \end{cases} \tag{2.8-18}$$



双轴晶体的光线速度面在主轴截面上的截线类似于双轴晶体的波矢面在主轴截面上的截线，如图 2.30 所示。通过中心 O 的两对交点的连线 B_1 和 B_2 的方向是两个光线速度相等的方向，称为晶体的光线轴方向。双轴晶体的光线速度面立体图如图 2.31 所示。



(a) xOy 面　　(b) xOz 面　　(c) yOz 面

图 2.30　双轴晶体的光线速度面在 3 个主轴截面上的截线

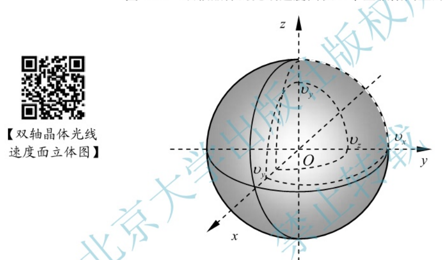


图 2.31　双轴晶体的光线速度面立体图

本节推导了波矢速度面方程和光线速度面方程，要点见表 2-10。

表 2-10　波矢速度面方程和光线速度面方程

方程＼晶体	单轴晶体	双轴晶体		
波矢速度面方程	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\upsilon_o^2 \\ \dfrac{x^2+y^2}{\upsilon_o^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_e^2}=\dfrac{\upsilon_p^4}{\upsilon_o^2\upsilon_e^2} \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=\upsilon_z^2 \\ \dfrac{x^2}{\upsilon_x^2}+\dfrac{y^2}{\upsilon_y^2}=\dfrac{\upsilon_p^4}{\upsilon_x^2\upsilon_y^2} \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+z^2=\upsilon_y^2 \\ \dfrac{x^2}{\upsilon_x^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_z^2}=\dfrac{\upsilon_p^4}{\upsilon_x^2\upsilon_z^2} \end{cases}$	$\begin{cases} y^2+z^2=\upsilon_x^2 \\ \dfrac{y^2}{\upsilon_y^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_z^2}=\dfrac{n_s'^4}{\upsilon_y^2\upsilon_z^2} \end{cases}$
光线速度面方程	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\upsilon_o^2 \\ \dfrac{x^2+y^2}{\upsilon_e^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_o^2}=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=\upsilon_z^2 \\ \dfrac{x^2}{\upsilon_y^2}+\dfrac{y^2}{\upsilon_x^2}=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+z^2=\upsilon_y^2 \\ \dfrac{x^2}{\upsilon_z^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_x^2}=1 \end{cases}$	$\begin{cases} y^2+z^2=\upsilon_x^2 \\ \dfrac{y^2}{\upsilon_z^2}+\dfrac{z^2}{\upsilon_y^2}=1 \end{cases}$



2.9　光在晶体表面的反射与折射

前面几节讨论了光在晶体内部的传播规律。在实际中，当用晶体作为光的调制器件时，往往都会遇到光在晶体表面上的入射和出射问题，因此，必须明确光从空气射入晶体或由晶体内部射出时在入射端面和出射端面的反射和折射特性。本节将讨论光在晶体表面上的双反射和双折射，并介绍用斯涅耳作图法和惠更斯作图法来分析光通过晶体后的折射方向。

2.9.1　双反射与双折射

在 1.8 节中已经学习到，一束单色光入射到各向同性的界面上时，将分别产生一束反射光和一束折射光，并且遵循反射定律和折射定律。通过对 2.3 节的学习，也已经知道，在晶体中对应于光波的一个传播方向 $\boldsymbol{k}_0$，可以有两种不同的光波折射率，即当一束单色光入射到晶体表面上时，会产生两束同频率的折射光，这就是双折射，如图 2.32 所示。而一束单色光从晶体内部射向界面时，则会产生两束频率相同的反射光，这就是双反射，如图 2.33 所示。

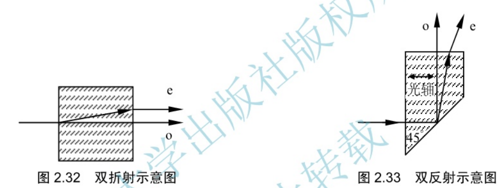


图 2.32　双折射示意图　　　　图 2.33　双反射示意图

通过 2.5 节的学习可以知道，两束折射光或两束反射光即为 o 光和 e 光，它们都是线偏振的并且振动方向相互垂直。

在 1.8 节中，讨论了平面波在两种不同介质分界面上的反射和折射时，得到入射波、反射波和折射波的波矢量在界面上的投影相等的结果，即 $\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}$。它是平面波在界面上发生反射和折射时的基本规律。这个结果不仅对两种各向同性介质的界面是成立的，对各向异性介质(晶体)的界面也是成立的。下面，就用平面波在界面上发生反射和折射时的基本规律来处理光波在晶体界面上的双折射和双反射问题。

对于双折射，设两个折射波的波矢量为 $\boldsymbol{k}_2'$ 和 $\boldsymbol{k}_2''$，则有

$$\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}_2'\cdot\boldsymbol{r} \tag{2.9-1}$$

$$\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}_2''\cdot\boldsymbol{r} \tag{2.9-2}$$

上两式可以改写为

$$k_1\sin\theta_1=k_2'\sin\theta_2' \tag{2.9-3a}$$

$$k_1\sin\theta_1=k_2''\sin\theta_2'' \tag{2.9-4a}$$

还可以具体写为

$$n_1\sin\theta_1=n_{\mathrm{o}}\sin\theta_{2\mathrm{o}} \tag{2.9-3b}$$

$$n_1\sin\theta_1=n_{\mathrm{e}}(\theta)\sin\theta_{2\mathrm{e}} \tag{2.9-4b}$$

式中，θ 是 e 光波矢与光轴之间的夹角，θ_1 是入射角，$\theta_2'(\theta_{2\mathrm{o}})$和$\theta_2''(\theta_{2\mathrm{e}})$分别是两个折射

波矢量 $\boldsymbol{k}_2'$ 和 $\boldsymbol{k}_2''$ 与界面法线的夹角。

对于双反射，设两个反射波的波矢量为 $\boldsymbol{k}_1'$ 和 $\boldsymbol{k}_1''$，对应的两个反射角为 θ_1' 和 θ_1''，则可以得到与双折射类似的关系式：

$$\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_1' \cdot \boldsymbol{r} \tag{2.9-5}$$

$$\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_1'' \cdot \boldsymbol{r} \tag{2.9-6}$$

上两式可以改写为

$$k_1 \sin\theta_1 = k_1' \sin\theta_1' \tag{2.9-7a}$$

$$k_1 \sin\theta_1 = k_1'' \sin\theta_1'' \tag{2.9-8a}$$

还可以具体写为

$$n_o \sin\theta_1 = n_o \sin\theta_{1o} \tag{2.9-7b}$$

$$n_o \sin\theta_1 = n_e(\theta) \sin\theta_{1e} \tag{2.9-8b}$$

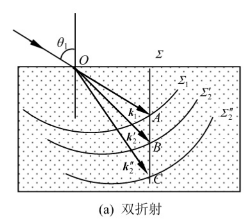
式中， $\theta_1'(\theta_{1o})$和$\theta_1''(\theta_{1e})$分别是两个反射波矢量 $\boldsymbol{k}_1'$ 和 $\boldsymbol{k}_1''$ 与界面法线的夹角。

由以上的表达式可以看出，在晶体中，光的折射率因传播方向、电场振动方向而异。如果光从空气射向晶体，则因折射光的折射率不同，其折射角也不同；如果光从晶体内部射出，相应的入射光和反射光的折射率也不相等，所以在一般情况下入射角不等于反射角。

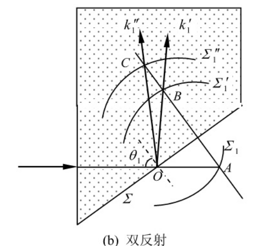
因为晶体中 e 光的折射率大小由式(2.5-6)决定，因此，晶体界面上反射光和折射光方向的关系表示式比较复杂，计算也比较困难。为此，经常采用斯涅耳作图法和惠更斯作图法来确定反射光和折射光的方向。

2.9.2 斯涅耳作图法

如图 2.34(a)所示，斯涅耳作图法的条件是假设平面光波从各向同性介质射向晶体表面。首先，以晶体表面 Σ 上的一点 O 为原点，在晶体内画出光波在入射介质中的波矢面 Σ_1，注意它是一个单层球面，因为各向同性介质中光波在各个方向的传播速度相同。其次，画出光波在晶体中的波矢面 Σ_2' 和 Σ_2''，注意它是双壳层面，分别对应 o 光和 e 光的波矢面，图 2.34 所示为正单轴晶体情况。将入射光线从 O 延长，与 Σ_1 交于 A 点，$\boldsymbol{OA}$ 就是入射波的波矢量 $\boldsymbol{k}_1$；过 A 点作垂直晶体表面的直线，与 Σ_2' 和 Σ_2'' 分别交于 B 和 C 点，则 $\boldsymbol{OB}$ 和 $\boldsymbol{OC}$ 就是所求的两个折射波的波矢量 $\boldsymbol{k}_2'$ 和 $\boldsymbol{k}_2''$。



(a) 双折射



(b) 双反射

图 2.34 斯涅耳作图法示意图



如图 2.34(b)所示，斯涅耳作图法也可以用于双反射的情况，以入射到界面上的点 O 为原点，首先在界面 Σ 外侧画出入射光的波矢面 Σ_1(球面)，然后，在晶体内画出两个反射光的波矢面 Σ_1' 和 Σ_1''，自原点 O 画出与入射光波矢方向平行的直线，与波矢面 Σ_1 相交于 A 点，$\boldsymbol{OA}$ 就是入射波的波矢量 $\boldsymbol{k}_1$，过 $\boldsymbol{k}_1$ 的末端作 Σ 的垂线，在晶体内侧交反射光波矢面 Σ_1' 和 Σ_1'' 于 B 和 C 两点，从而确定出两个反射波的波矢量 $\boldsymbol{k}_1'$ 和 $\boldsymbol{k}_1''$。

应当注意的是，由斯涅耳作图法所确定的两个反射波矢量和两个折射波矢量只是允许的或可能的两个波矢，至于实际上这两个波矢是否存在，要看入射光是否包含各反射光或各折射光的场矢量方向上的分量。下面，利用斯涅耳作图法讨论几个单轴晶体双折射的特例。

1. 平面波垂直入射

如图 2.35 所示，图中是一个正单轴晶体，晶体的光轴位于入射面内，且与晶体表面斜交。o 光和 e 光的波矢和光线方向按如下步骤确定：首先在入射界面上任取一点作为原点，按比例在晶体内画出入射光在各向同性介质的波矢面——球面，然后在晶体中画出光进入晶体后 o 光和 e 光的波矢面——球面和椭球面，两个面在光轴处相切。光波入射晶体后分为 o 光和 e 光。o 光的振动方向垂直于主截面，e 光的振动方向在主截面内。o 光和 e 光的波矢方向相同，均垂直于界面，但光线方向不同。过 $\boldsymbol{k}_e$ 矢量末端所作的椭圆切线是 e 光的 $\boldsymbol{E}$ 矢量振动方向，其法线方向为 e 光的光线方向 $\boldsymbol{s}_e$，它仍然在主截面内。o 光的光线方向 $\boldsymbol{s}_o$ 则平行于的 $\boldsymbol{k}_o$ 方向。在一般情况下，如果晶体足够厚，从晶体下表面会出射振动方向互相垂直的两束光，其中相应于 e 光的透射光相对入射光的位置在主截面内有一个平移。

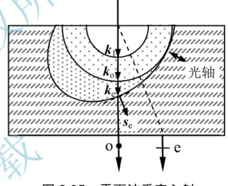
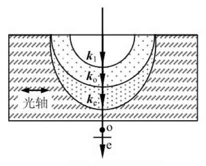


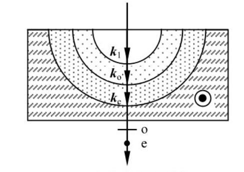
图 2.35　平面波垂直入射

图 2.36 给出了平面波垂直入射且光轴平行于晶体表面时的折射光方向，图 2.36(a)和图 2.36(b)分别是光轴平行于图面和光轴垂直于图面的情况。这时，在晶体内产生的 o 光和 e 光的波矢方向、光线方向均相同，但它们的传播速度不同。因此，当入射光为线偏振光时，从晶体下表面出射的光在一般情况下将是随晶体厚度变化的椭圆偏振光。

图 2.37 给出了平面波垂直入射且光轴垂直于晶体表面时的折射光的方向。由于此时晶体内光的波矢方向平行于光轴方向，所以 o 光和 e 光完全重合。从晶体下表面出射的光的偏振态与入射光相同。



(a) 光轴平行于图面



(b) 光轴垂直于图面

图 2.36　平面波垂直入射且光轴平行于晶面

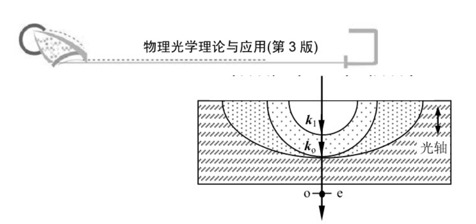


图 2.37　平面波垂直入射且光轴垂直于晶面

2. 平面波在主截面内斜入射

如图 2.38 所示，平面波在主截面内斜入射时，在晶体内将分为 o 光和 e 光，e 光的波矢方向、光线方向一般与 o 光不相同，但都在主截面内。当晶体足够厚时，从晶体下表面射出的是两束振动方向相互垂直的线偏振光，传播方向与入射光相同。

3. 光轴平行于晶体表面，入射面垂直于主截面

图 2.39 绘出了晶体光轴平行于晶体表面(垂直于图面)，平行光波的入射面垂直于主截面时折射光的传播方向。此时，光进入晶体以后分为 o 光和 e 光。对于 o 光，其波矢方向与光线方向一致；而 e 光因其折射率为常数 n_e，与入射角的大小无关，所以它的波矢方向也与光线方向相同。

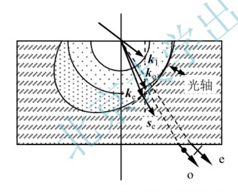


图 2.38　平面波在主截面内斜入射

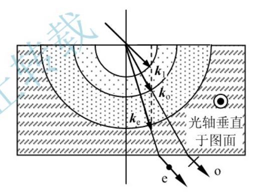


图 2.39　入射面与主截面垂直

2.9.3　惠更斯作图法

在各向同性介质中，可以利用惠更斯作图法来确定折射光线的方向，这个方法也可以应用到晶体中，从而直接得到晶体中 o 光线和 e 光线的方向。

1. 光波斜入射

图 2.40 所示为光入射到负单轴晶体的情况。其中图 2.40(a)是光轴在入射面内的情况。惠更斯作图法步骤如下。首先以晶体表面上光波 AA' 最先到达的 A 点为圆心，$A'O'/n_o$ 为半径，画出 o 光波光线速度面，在图内用圆表示，再画出 e 光波光线速度面，在图内用椭圆表示，使 e 光波光线速度面和 o 光波光线速度面在光轴方向相切。从 O' 点向圆和椭圆分别作切线，切点分别为 O 和 E，那么 OO' 和 EO' 就分别是晶体内 o 光和 e 光的波前，而



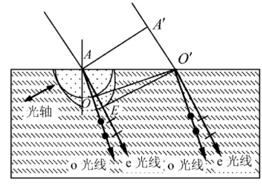
AO 和 ***AE*** 分别是 o 光线和 e 光线的方向。一般情况下，e 光波矢方向与 e 光线方向不一致。

图 2.40(b)是光轴垂直于入射面的情况。这时，不仅 o 光波矢方向与光线方向一致，e 光波矢方向与光线方向也一致，并且 o 光线和 e 光线的折射角分别满足

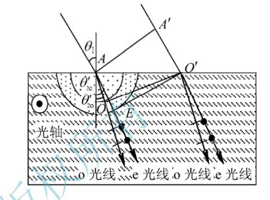
$$\sin\theta_1 = n_o \sin\theta'_{2o} \tag{2.9-9}$$

$$\sin\theta_1 = n_e \sin\theta'_{2e} \tag{2.9-10}$$

因此，在这种情况下，确定 e 光线的方向特别简单。



(a) 光轴在入射面内的情况



(b) 光轴垂直于入射面的情况

图 2.40　光波斜入射

2. 光波垂直入射

在实际应用中，一般采用光波垂直入射晶体表面的情况，如图 2.41 所示。设有一束平行光垂直入射到负单轴晶体的表面上。晶体的光轴在图面内，并与晶体表面成某一角度。根据惠更斯原理，波前上的每一点都可视为一个子波源。于是在平行光束到达晶面时选取 *A*、*A′* 两点代表这些子波源，并以 *AA′* 表示入射光束波前。经过一小段时间间隔后，从这些点射入晶体内的子波如图 2.41 所示。

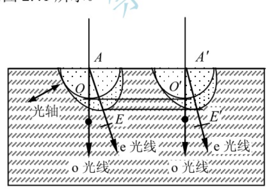


图 2.41　光波垂直入射

其中的圆代表 o 光的子波波面，即 o 光光线面-球面与图面的截线，椭圆代表 e 光的子波波面，即 e 光光线面-椭球面与图面的截线。如果作出 *A*、*A′* 间的所有点的子波波面，那么，o 光的新的波前就是所有球面的包络面，即图中公切线 *OO′*，而 e 光的新的波前就是所有椭球面的包络面，即图中公切线 *EE′*。把 *A* 点与切点 *O* 和 *E* 连接起来就得到晶体内 o 光线和 e 光线的方向。

可见，垂直入射光束在晶体内分成了两束，其中 o 光束 OO' 仍沿着原来的方向传播，而 e 光束 EE' 则偏离原方向。但是，它们的波前都与入射波前平行，因此，波矢方向不变。

对于垂直入射的平行光，还有两种特殊情形，如图 2.42 所示。图 2.42(a)表示晶体表面切成与光轴垂直，这时光线沿光轴方向传播，o 光和 e 光完全重合。图 2.42(b)和图 2.42(c)表示晶体表面切成与光轴平行，这种情形折射光线尽管只有一束，但是却包括 o 光和 e 光，它们的传播速度不同，$\boldsymbol{E}$ 矢量或 $\boldsymbol{D}$ 矢量方向互相垂直。透过晶体后，o 光和 e 光有一个固定的位相差。

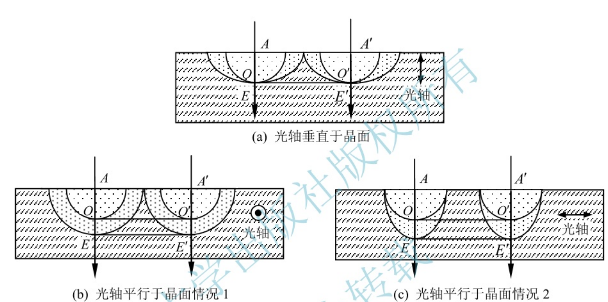


图 2.42　两种特殊情形

应当注意的是，在普遍情况下，光轴既不与入射面平行也不与入射面垂直，这时，只在一个平面上作图已经不够了。

对于双轴晶体，原则上也可以利用惠更斯作图法来求折射光的方向。但是，由于双轴晶体的光线速度面复杂，一般情况下作图并不容易。只是在某些特殊情况下，作图才比较简单。图 2.43 所示的就是一种比较简单的情况：晶体内光线和光轴都在入射面内，这时晶体内两束光的光线速度面与入射面的交线是一个圆和一个椭圆，用惠更斯作图法很容易定出两束折射光的方向。

值得注意的是图 2.44 所示的情形，这时由 B 点向圆和椭圆所引的切线正好重合。过该切线并且垂直于入射面的平面就是晶体内折射波的波前，这时只有一个折射波前，并且波前的法线方向就是晶体的光轴方向。从三维空间来看，这一波前与光线面的交点不止图上所标的 E_1 和 E_2 两点，而是有无数个点，它们构成了以 E_1E_2 为直径的圆。由 A 点向这个圆上各点所引的直线都是光线方向。因此，如果入射光束较细，则晶体内的光线形成一个圆锥，射出晶体后成为一个圆筒。这一折射情形称为内锥形折射。

除了内锥形折射以外，双轴晶体还可以产生外锥形折射，如图 2.45 所示。当自然光射入晶体后沿光轴 AB 方向传播时，由于 B 点处光线面的切平面也不止两个，其法线方向也



构成一个圆锥面。因此，当光束从晶体射出时，便沿着与各法线对应的折射方向传播，形成外锥形折射。外锥形折射的装置如图 2.46 所示。入射光是一束实心的锥形光束，小孔 A 和 B 选择在晶体内沿光轴传播的光线，出射后形成外锥形折射。关于双轴晶体的内锥形折射和外锥形折射及其应用将在 2.10 节中进行详细的讨论。

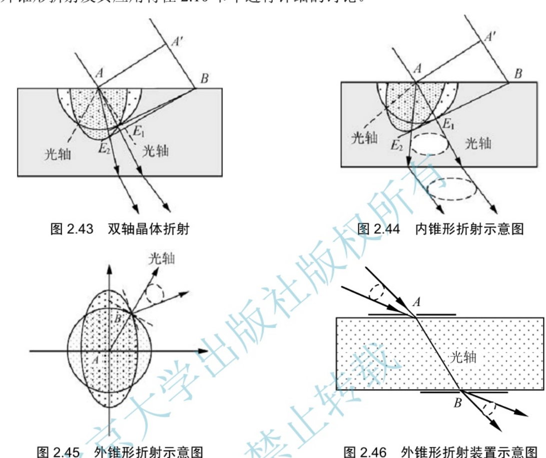


图 2.43　双轴晶体折射

图 2.44　内锥形折射示意图

图 2.45　外锥形折射示意图

图 2.46　外锥形折射装置示意图

本节讨论了光在晶体表面上的双反射和双折射，并介绍了用斯涅耳作图法和惠更斯作图法来分析光通过晶体后的折射方向。本节要点见表 2-11。

表 2-11　光在晶体表面上的反射和折射

双　折　射	双　反　射	斯涅耳作图法	惠更斯作图法
当一束单色光入射到晶体表面上时，会产生两束同频率的折射光	当一束单色光从晶体内部射向界面时，会产生两束频率相同的反射光	利用波矢面来确定光波在晶体表面的反射波和折射波	利用光线速度面来确定光波在晶体表面的反射波和折射波

2.10　双轴晶体产生的锥形折射

通过前面的讨论可以知道，当单轴晶体的光轴与晶体表面垂直，而且入射光束垂直晶体表面时，o 光和 e 光完全重合。但是，对于双轴晶体光线方向和波矢方向总是不同的。

当波矢与双轴晶体的一个光轴重合，如图 2.47 所示，如果用光阑使一束很窄的非偏振的平行光从各向同性介质垂直入射到晶片上，这时，在晶体中传播的波矢方向沿着光轴方向与电位移矢量的偏振方向无关，但是光线的传播方向与电矢量的偏振方向有关。由于入射光波由许多电矢量沿着不同方向的平面波组成，因此，电矢量方向不同的光波，光线的传播方向也不同。这些光线方向分布在一个锥面上，所以，从晶体中透射出来的光将形成一个空心圆筒。由于在晶体内光线分布在一个锥面上，因此，称为内锥形折射。

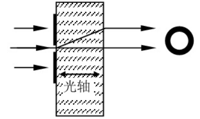


图 2.47　产生内锥形折射示意图

图 2.48　产生外锥形折射示意图

如果使会聚的非偏振光通过小孔光阑入射到晶片上，并使光线方向沿着光轴方向，如图 2.48 所示。这时，在晶体中光线的传播方向与电矢量的偏振方向无关，但是，波矢的传播方向与电位移矢量的偏振方向有关。因此，电位移矢量方向不同的光波，波矢的传播方向也不同。若在出射端加一个小孔光阑，则在晶体中传播的波矢方向不同的平面波都由这个小孔折射出去。波矢方向不同，由晶体中透射出去的光波传播方向也不同，这些光波传播方向分布在以小孔为顶的锥面上，形成一个空心的光锥。由于透射光波在晶体外分布在一个锥面上，因此，称为外锥形折射。本节将从理论上对内锥形折射和外锥形折射进行分析，并推导出它们所满足的方程。

2.10.1　内锥形折射

当光波波矢 $\boldsymbol{k}$ 与双轴晶体的光轴之一重合时，过原点与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的平面与折射率椭球的截线是一个圆，因此，所有与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的 $\boldsymbol{D}$ 方向都是允许的，在这种情况下相应于 $\boldsymbol{D}$ 的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 可以有无限多个方向，这样也就有无限多个光线 $\boldsymbol{s}$ 方向。也就是说，光波沿着双轴晶体的一个光轴传播时，无论电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 取什么方向，只有唯一的一个相速度，但是，由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 方向不同，将出现无限多个光线方向。这些光线将形成一个锥面，从而产生内锥形折射。

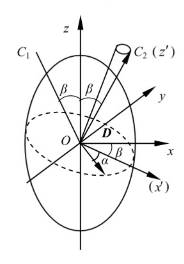


图 2.49　锥形折射示意图

为了讨论方便，令主轴坐标系绕 y 轴旋转 β 角，使新的 z 轴(z' 轴)与光轴 C_2 重合，如图 2.49 所示。

坐标变换矩阵为

$$a=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix} \tag{2.10-1}$$

代入式(2.1-12)，可以得到新坐标系中的折射率张量为



$$[n'] = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos^2\beta}{n_x^2} + \dfrac{\sin^2\beta}{n_y^2} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n_x^2} - \dfrac{1}{n_z^2}\right)\sin 2\beta \\ 0 & \dfrac{1}{n_y^2} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n_x^2} - \dfrac{1}{n_z^2}\right)\sin 2\beta & 0 & \dfrac{\sin^2\beta}{n_x^2} + \dfrac{\cos^2\beta}{n_z^2} \end{bmatrix} \tag{2.10-2}$$

与光轴垂直的 $\boldsymbol{D}$ 矢量可以表示为

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D\cos\alpha \\ D\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.10-3}$$

式中，α 是 $\boldsymbol{D}$ 与 x' 轴之间的夹角。将上两式代入式(2.1-5)，并将电矢量 $\boldsymbol{E}$ 归一化，得到

$$\frac{\boldsymbol{E}}{E} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\gamma\cos^2\alpha}} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ \tan\gamma\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{2.10-4}$$

式中

$$\tan\gamma = \frac{\sqrt{(n_z^2 - n_y^2)(n_y^2 - n_x^2)}}{n_x n_z} \tag{2.10-5}$$

因为光线方向单位矢量为

$$\boldsymbol{s}_0 = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{k}_0\times\boldsymbol{E}}{\left|\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{k}_0\times\boldsymbol{E})\right|} \tag{2.10-6}$$

在新坐标系中，$\boldsymbol{k}_0 = (0, 0, 1)$，将式(2.10-4)代入式(2.10-6)，可以得到

$$\boldsymbol{s}_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\gamma\cos^2\alpha}} \begin{bmatrix} -\tan\gamma\cos^2\alpha \\ \tan\gamma\sin\alpha\cos\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.10-7}$$

在 $z' = 1$ 的平面上，光线末端的坐标为

$$\begin{cases} x' = -\tan\gamma\cos^2\alpha \\ y' = \tan\gamma\sin\alpha\cos\alpha \end{cases} \tag{2.10-8}$$

由此可以得到

$$\left(x' + \frac{1}{2}\tan\gamma\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{1}{2}\tan\gamma\right)^2 \tag{2.10-9}$$

可见，光线末端轨迹是一个直径为 $\tan\gamma$ 的圆，圆心坐标为 $(-\tan\gamma/2, 0)$。因此光线矢量会形成一个开口角为 γ 的锥面，如图 2.50 所示。

可见，如果一束单色的非偏振平行光垂直入射到前端面有小孔的双轴晶体上，而且晶体的一条光轴与入射和出射端面垂直，则在晶体内光线将分布在一个开口角为 γ 的锥面上，而从晶体内射出的光线则形成一个圆筒。

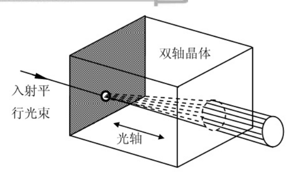


图 2.50　内锥形折射立体圆

2.10.2　外锥形折射

在双轴晶体中，当光线方向 $\boldsymbol{s}$ 沿着双轴晶体的一个光轴方向时，可以有无数个波矢方向 $\boldsymbol{k}$ 与之对应，这些波矢也分布在一个锥面，从而产生外锥形折射。

类似于内锥形折射的讨论，同样令主轴坐标系绕 y 轴旋转 β 角，使新的 z 轴(z' 轴)与光轴 C_2 重合，坐标变换矩阵仍然为式(2.10-1)，将其代入式(2.1-11)，可以得到新坐标系中的介电张量为

$$[\varepsilon'] = \begin{bmatrix} n_x^2\cos^2\beta + n_y^2\sin^2\beta & 0 & \frac{1}{2}(n_x^2 - n_z^2)\sin 2\beta \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ \frac{1}{2}(n_x^2 - n_z^2)\sin 2\beta & 0 & n_x^2\sin^2\beta + n_z^2\cos^2\beta \end{bmatrix} \tag{2.10-10}$$

与光轴垂直的 $\boldsymbol{E}$ 矢量可以表示为

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E\cos\alpha \\ E\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.10-11}$$

式中，α 是 $\boldsymbol{D}$ 与 x' 轴之间的夹角。将上两式代入式(2.1-2)，并将电矢量 $\boldsymbol{D}$ 归一化，得到

$$\frac{\boldsymbol{D}}{D} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\gamma'\cos^2\alpha}}\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ \tan\gamma'\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{2.10-12}$$

式中

$$\tan\gamma' = \frac{\sqrt{(n_y^2 - n_z^2)(n_x^2 - n_y^2)}}{n_y^2} \tag{2.10-13}$$

因为

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{s}_0\times\boldsymbol{D})/\left|\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{s}_0\times\boldsymbol{D})\right| \tag{2.10-14}$$

在新坐标系中，$\boldsymbol{s}_0 = (0,0,1)$，将式(2.10-12)代入式(2.10-14)，得到

$$\boldsymbol{k} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\gamma'\cos^2\alpha}}\begin{bmatrix} -\tan\gamma'\cos^2\alpha \\ \tan\gamma'\sin\alpha\cos\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.10-15}$$



在 $z'=1$ 的平面上，波矢量末端的坐标为

$$\begin{cases} x' = -\tan\gamma'\cos^2\alpha \\ y' = \tan\gamma'\sin\alpha\cos\alpha \end{cases} \tag{2.10-16}$$

由此可以得到

$$\left(x' + \frac{1}{2}\tan\gamma'\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{1}{2}\tan\gamma'\right)^2 \tag{2.10-17}$$

可见，波矢量末端轨迹是一个直径为 $\tan\gamma'$ 的圆。因此，在晶体内波矢量会形成一个开口角为 γ' 的锥面，如图 2.51 所示。

可见，如果一束单色的非偏振会聚光入射到前后端面都有小孔的双轴晶体上，而且晶体的一条光轴与入射和出射端面垂直，则在晶体后端面小孔处将出射一个锥形光束。

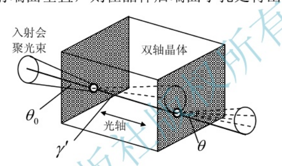


图 2.51　外锥形折射立体圆

本节从理论上对内锥形折射和外锥形折射进行了分析，并推导出它们所满足的方程，要点见表 2-12。

表 2-12　双轴晶体产生的锥形折射

项目 折射方式	条　件	方　程
内锥形折射	平行的非偏振光通过小孔光阑入射到晶片上，波矢方向与双轴晶体的一个光轴重合	$\left(x' + \frac{1}{2}\tan\gamma\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{1}{2}\tan\gamma\right)^2$
外锥形折射	会聚的非偏振光通过小孔光阑入射到晶片上，光线方向沿着双轴晶体的一个光轴方向	$\left(x' + \frac{1}{2}\tan\gamma'\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{1}{2}\tan\gamma'\right)^2$

小　结

本章在介绍了晶体的基本性质后，阐述了寻常光和非常光、晶体的光轴、主平面、主截面和入射面、介电张量和折射率张量等重要概念，在此基础上讨论了光在晶体中传播的基本规律、晶体的菲涅耳方程、折射率椭球方程。

本章通过求波矢菲涅耳方程的解，讨论了 o 光和 e 光的振动方向、e 光的离散角。利用晶体的菲涅耳方程，推导了波矢折射率曲面和光线折射率曲面、波矢曲面方程和光线曲

面方程、波矢速度面和光线速度面，从而详细地讨论了光在单轴和双轴晶体中的传播规律。

本章还通过斯涅耳作图法和惠更斯作图法讨论了光在晶体表面的双反射和双折射，并详细介绍和推导了晶体内锥形折射和外锥形折射的条件和所满足的方程。

应 用 实 例

应用实例 2-1 一束振幅为 E，波长为 589nm 的线偏振光垂直入射一块方解石晶体，晶体的光轴与晶体表面成 30° 角，线偏振光振动方向与晶体的主平面成 30° 角，n_o=1.6584，n_e=1.4864，求 o 光和 e 光的相对振幅和强度。

解：设 o 光和 e 光的振幅分别为 E_o 和 E_e，则有

$$E_o = E\sin 30^\circ$$

$$E_e = E\cos 30^\circ$$

因此，o 光和 e 光的相对振幅为

$$\frac{E_o}{E_e} = \tan 30^\circ = 0.577$$

设 o 光和 e 光的强度分别为 I_o 和 I_e，利用式(1.9-34)，并省略常系数，则有

$$I_o = n_o(E\sin 30^\circ)^2$$

$$I_e = n_e(\theta)(E\cos 30^\circ)^2$$

因此，o 光和 e 光的相对强度为

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{n_o}{n_e(\theta)}\tan^2 30^\circ = \frac{\sqrt{n_o^2\sin^2 60^\circ + n_e^2\cos^2 60^\circ}}{n_e} \times 0.577^2 = 0.332$$

应用实例 2-2 两个完全一样的方解石晶体 A 和 B 前后放置，强度为 I 的自然光垂直入射到 A 后再通过 B，求 A 和 B 主截面成 0°、45° 和 90° 角时，从 B 出射的各束光的强度。

解：因为入射光为自然光，因此，进入 A 后被分解为强度相等的 o 光和 e 光，即

$$I_o = \frac{I}{2};\quad I_e = \frac{I}{2}$$

这两束光入射 B 后又分别被分解为 o 光和 e 光，光强分别为

$$I_{oo} = E_{oo}^2 = \frac{I}{2}\cos^2\alpha;\quad I_{oe} = \frac{I}{2}\sin^2\alpha;\quad I_{ee} = E_{ee}^2 = \frac{I}{2}\cos^2\alpha;\quad I_{eo} = \frac{I}{2}\sin^2\alpha$$

当 $\alpha = 0^\circ$ 时，从 B 出射的各束光的强度为

$$I_{oo} = I_{ee} = \frac{I}{2};\quad I_{oe} = I_{eo} = 0$$

当 $\alpha = 45^\circ$ 时，从 B 出射的各束光的强度为

$$I_{oo} = I_{ee} = I_{oe} = I_{eo} = \frac{I}{4}$$

当 $\alpha = 90^\circ$ 时，从 B 出射的各束光的强度为



$$I_{oo}=I_{ee}=0\ ;\ \ I_{oe}=I_{eo}=\frac{I}{2}$$

应用实例 2-3　波长为 546nm 的绿光垂直照射光轴与晶体表面平行的石英晶体，已知 n_o=1.546，n_e=1.555，晶体的厚度为 1mm，求 o 光和 e 光通过晶体以后的位相差。

解：设 o 光和 e 光通过晶体以后的位相差为 δ，则有

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)l=\frac{2\times180^\circ}{546}\times(1.555-1.546)\times10^6\approx5934^\circ$$

因为

$$\delta'=\frac{\delta}{360^\circ}=\frac{5934^\circ}{360^\circ}=16.483$$

所以，实际位相差为

$$\delta''=5934^\circ-16\times360^\circ\ =174^\circ$$

即 o 光和 e 光通过晶体后的位相差为 174°。

应用实例 2-4　波长为 546nm 的光波正入射 KDP 晶体时，n_o=1.512，n_e=1.470，晶体的光轴在入射面内，并且与晶体表面成 30°角，晶片的厚度为 5mm。求：(1) e 光的离散角；(2) o 光和 e 光通过晶片后的光程差。

解：根据式(2.5-14)，有

$$\tan\alpha=\left(1-\frac{n_o^2}{n_e^2}\right)\frac{\tan\theta}{1+\frac{n_o^2}{n_e^2}\tan^2\theta}=\left(1-\frac{1.512^2}{1.470^2}\right)\frac{\tan60^\circ}{1+\frac{1.512^2}{1.470^2}\tan^2 60^\circ}=-0.024$$

可以得到 e 光的离散角为

$$\alpha\approx-1.38^\circ$$

负号表示 e 光线较其波矢远离光轴。根据式(2.4-12)，可以得到 e 光在晶体内传播的折射率为

$$n_e(60^\circ)=\frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2\sin^2 60^\circ+n_e^2\cos^2 60^\circ}}=\frac{1.512\times1.470}{\sqrt{1.512^2\times\sin^2 60^\circ+1.470^2\times\cos^2 60^\circ}}=1.480$$

o 光和 e 光通过晶片后的光程差为

$$\Delta=\left[n_o-n_e(60^\circ)\right]d=(1.512-1.480)\times5\text{mm}=0.16\text{mm}$$

应用实例 2-5　已知方解石晶体是单轴晶体，对波长为 532nm 的激光，其 $n_o=1.664$，$n_e=1.488$。求：(1) 该晶体对波长为 532nm 的激光的折射率椭球和折射率曲面的具体表达式；(2) 当波长为 532nm 的激光与光轴成30°角传播时的折射率；(3) 当波长为 532nm 的激光入射该晶体时，o 光和 e 光产生的最大离散角。

解：根据式(2.4-7)，折射率椭球的具体表达式为

$$\frac{x^2+y^2}{1.664^2}+\frac{z^2}{1.488^2}=1$$

根据式(2.6-6)，折射率曲面的具体表达式为



$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1.664^2 \\ \dfrac{x^2+y^2}{1.488^2}+\dfrac{z^2}{1.664^2}=1 \end{cases}$$

根据式(2.4-12)，可以得到 e 光在晶体内传播的折射率为

$$n_e(30^\circ)=\frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta}}=\frac{1.664\times1.488}{\sqrt{1.664^2\times\sin^2 30^\circ+1.488^2\times\cos^2 30^\circ}}=1.614$$

根据式(2.5-15)，o 光和 e 光产生的最大离散角为

$$\tan\alpha_{\max}=\frac{n_e^2-n_o^2}{2n_o n_e}=\frac{1.488^2-1.664^2}{2\times1.664\times1.488}=-0.112\Rightarrow\alpha_{\max}=-6.39^\circ$$

负号表示 e 光线较其波矢远离光轴。

习　题

2.1　线偏振光垂直入射到一块光轴平行于晶体表面的方解石晶体上，若光振动矢量的方向与晶体主平面分别成 30°、45°和 60°的夹角，求 o 光和 e 光从晶体上透射出来后的强度比分别是多少。

2.2　ADP 是负单轴晶体，将其切割成厚度 d=1cm 的晶片，晶片表面与光轴成 45° 角。已知该晶体对波长为 532nm 的绿光的主折射率为 n_o=1.5246，n_e=1.4792，当光垂直入射时，求：(1)晶片内 o 光和 e 光的夹角；(2) o 光和 e 光通过晶片后的光程差。

2.3　KDP 是负单轴晶体，它对于波长为 546nm 的光波，主折射率分别为 n_o=1.512 和 n_e=1.470。试求光波沿 x 轴和 y 轴以及与光轴成 30° 角传播时对应的折射率。

2.4　如图 2.52 所示，波长为 632.8nm 的 He-Ne 激光垂直照射方解石晶体，晶体厚度 d=1mm，晶片表面与光轴成 60° 角，n_o=1.654，n_e=1.484。求：(1)晶片内 o 光和 e 光的夹角；(2) o 光和 e 光的振动方向；(3) o 光和 e 光通过晶片后的位相差。

2.5　一单轴晶体的光轴与晶体表面垂直，晶体的两个主折射率分别为 n_o 和 n_e，证明：$\tan\theta'_{2e}=n_o\sin\theta_i\big/n_e\sqrt{n_e^2-\sin^2\theta_i}$，其中 θ_i 是入射角，θ'_{2e} 是 e 光折射光线与界面法线的夹角。

2.6　一块负单轴晶体按图 2.53 所示方式切割。一束单色光从左方通光面正入射，经两个 45° 斜面全内反射后从右方通光面射出，设晶体主折射率为 n_o 和 n_e，试计算 o 光线和 e 光线经第一个 45° 反射面反射后与光轴的夹角，画出整个光路并标出相应的振动方向。

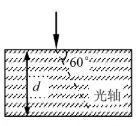


图 2.52　习题 2.4 用图

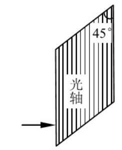


图 2.53　习题 2.6 用图





2.7　证明：在单轴晶体中，当 $\tan\theta = n_{\mathrm{e}}/n_{\mathrm{o}}$ 时，e光与光轴偏离角 α 具有最大值，并求 $\alpha_{\max}$ 的表达式。

2.8　一块负单轴晶体制成的棱镜如图 2.54 所示，自然光从左方正入射到棱镜。试证明 e 光线在棱镜斜面上反射后与光轴夹角 θ' 由式 $\tan\theta' = (n_{\mathrm{o}}^2 - n_{\mathrm{e}}^2)/2n_{\mathrm{e}}^2$ 决定。

2.9　用 KDP 晶体制成顶角为 60° 的棱镜，如图 2.55 所示，光轴平行于折射棱。KDP 晶体对于 $\lambda = 0.53\mu\mathrm{m}$ 光波的主折射率 n_{o}=1.510，n_{e}=1.470，若入射光以最小偏向角的方向在棱镜内折射，用焦距为 10cm 的透镜对出射的 o 光和 e 光聚焦，在谱面上形成的谱线间距为多少？提示：对于折射率为 n、顶角为 α 的棱镜，其最小偏向角满足 $n = \left[\sin(\alpha + \theta_{\mathrm{m}})/2\right]/\sin(\alpha/2)$。

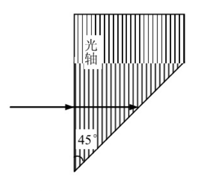


图 2.54　习题 2.8 用图

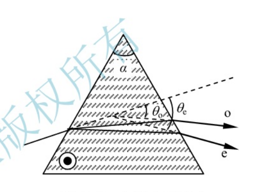


图 2.55　习题 2.9 用图

2.10　已知石英晶体是单轴晶体，对波长为 632.8nm 的 He-Ne 激光，其 n_{o}=1.54，n_{e}=1.58。试求：(1)石英晶体对 He-Ne 激光的折射率椭球方程和折射率曲面方程；(2)He-Ne 激光沿 x、y 和 z 方向传播时，对应的折射率和相速度；(3)当入射 He-Ne 激光与光轴(z 轴)夹角为 30°、45° 和 60° 时，其 e 光的折射率各是多少？

2.11　一块晶片的光轴与表面平行，且平行于入射面，试证明晶片内 o 光波矢和 e 光波矢的折射角之间有如下关系：$\tan\theta_{2\mathrm{o}}/\tan\theta_{2\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}}/n_{\mathrm{o}}$。对于 ADP 晶片，$n_{\mathrm{o}}$=1.526，$n_{\mathrm{e}}$=1.480(对波长 546nm)，若光波入射角为 45°，晶片内 o 光和 e 光的夹角是多少？

2.12　证明在负单轴晶体中，第 I 类位相匹配角 θ_{m}^{-1} 满足 $\sin^2\theta_{\mathrm{m}}^{-1} = \left(n_{\mathrm{o1}}^{-2} - n_{\mathrm{o2}}^{-2}\right)/\left(n_{\mathrm{e2}}^{-2} - n_{\mathrm{o2}}^{-2}\right)$，若负单轴倍频晶体 KDP 被用于 Nd∶YAG 激光器，已知对基频光 λ_1=1064nm，n_{o1}=1.4942，对倍频光 λ_2=532nm，n_{o2}=1.5130，n_{e2}=1.4711，计算该倍频晶体的第 I 类位相匹配角。

2.13　如图 2.56 所示，方解石晶体的光轴与晶面成 30° 角且在入射面内，当钠黄光以 60° 入射角入射到晶体时，求晶体内 e 光线的折射角。在晶体内能否产生双折射？设 n_{o} = 1.6584，n_{e} = 1.4864。

2.14　如图 2.57 所示，一束光掠入射某晶体，晶体的光轴与入射面垂直，在出射面上 o 光和 e 光之间距离为 2.5μm，如果 n_{o} = 1.525，n_{e} = 1.479，求晶体的厚度是多少。



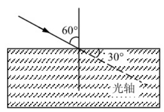


图 2.56　习题 2.13 用图

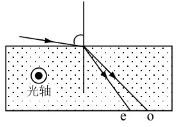


图 2.57　习题 2.14 用图

2.15　若用正单轴石英晶体制成塞纳蒙特(Se′narmont)棱镜，如图 2.58 所示，每块棱镜有一个顶角是 30°，光束正入射于棱镜。求光束从棱镜出射后，o 光和 e 光之间的夹角。设 n_o=1.544，n_e=1.553。

2.16　一束自然光通过方解石制成的洛匈(Rochon)棱镜，如图 2.59 所示，光束正入射于棱镜。求光束从棱镜出射后，o 光和 e 光之间的夹角。设 n_o=1.658，n_e=1.486，试说明这两种棱镜能否倒过来(即入射界面变成出射界面)使用。

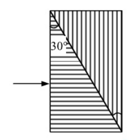


图 2.58　习题 2.15 用图

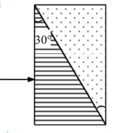


图 2.59　习题 2.16 用图

2.17　方解石晶体的光轴与晶面成 30° 角，并且平行于入射面，钠黄光以 45° 角入射到方解石晶体表面，如图 2.60 所示。设 n_o ＝1.6584，n_e ＝1.4864，求晶体内 o 光和 e 光的折射角。

2.18　一束绿光在 60° 角下入射到 KDP 晶体表面，晶体的 n_o ＝1.512，n_e ＝1.470。设光轴与晶体表面平行，并垂直于入射面，如图 2.61 所示，试求晶体中 o 光与 e 光的夹角，画出整个光路并标出相应的振动方向。

2.19　某晶体的主折射率 n_o =1.524，n_e =1.479，厚度为 2cm，光轴方向与通光面法线成 45° 角，如图 2.62 所示，波长为 0.532 μm 的光垂直射入晶体时，求：(1) 在晶体中传播的 o 光和 e 光的夹角；(2) 从晶体后表面出射时 o 光和 e 光的光程差。

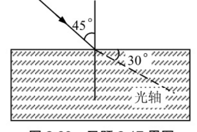


图 2.60　习题 2.17 用图

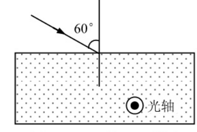


图 2.61　习题 2.18 用图

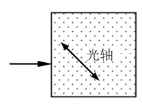


图 2.62　习题 2.19 用图

2.20　一束偏振的钠黄光垂直入射于光轴平行于晶体表面的方解石晶体，其振动方向



与晶体主截面的夹角为 20°。若取 $n_o = 1.658$，$n_e = 1.486$，试求传播于晶体中的 o、e 两束光的相对振幅和相对强度。

2.21　一水晶薄片厚度为 0.850mm，其光轴平行于晶体表面并且在入射面内。现用一波长为 546.1mm 的绿光束垂直入射于此水晶片。已知水晶对波长为 546.1nm 的绿光的主折射率为 $n_o = 1.5462$，$n_e = 1.5554$，求：(1) o、e 两束光在晶片中的光程；(2) 两者经晶片后的位相差。

2.22　一束钠黄光以 60° 角入射到一冰洲石晶体，冰洲石光轴垂直于入射面。如果取 $n_o = 1.658$，$n_e = 1.486$，求晶体中 o、e 两束光之间的夹角。

2.23　一束钠黄光掠入射到厚度为 5mm 的某一晶体上，晶体光轴垂直于入射面。若取 $n_o = 1.3090$，$n_e = 1.3104$，求在晶体出射面上 o、e 两束光之间的距离。

2.24　一水晶棱镜的顶角为 60°，其光轴垂直于棱镜的主截面，一束钠黄光以近似最小偏向角的方向入射于这个棱镜。已知 $n_o = 1.54425$，$n_e = 1.55336$，现用焦距为 1m 的透镜聚焦，试求 o 光焦点与 e 光焦点的间隔。

2.25　方解石晶体对于汞绿光的主折射率为 $n_o = 1.66168$，$n_e = 1.48792$，试问在这个晶体内部绿光的波矢与其光线的最大夹角 α_M 为多少？此时波矢与光轴的夹角 θ 为多少？此时光线与光轴的夹角为多少？

2.26　一块石英晶体的光轴垂直于晶体表面，钠黄光以 30° 角入射到晶体上时，已知 $n_o = 1.54424$, $n_e = 1.55335$，求晶体中 o 光和 e 光的夹角。

2.27　钠黄光以 45° 角入射到方解石晶体表面，晶体的光轴与晶体表面成 30° 角，并且方向与入射面平行，已知 $n_o = 1.6584$，$n_e = 1.4864$，求晶体中 e 光线的折射角。

2.28　钠黄光垂直入射到方解石晶体，晶体的厚度为 d=1cm，晶片表面与光轴成 30° 角，已知 n_o=1.6584，n_e=1.4864，求：(1) 晶片内 o 光和 e 光的夹角；(2) o 光和 e 光通过晶片后的光程差。